D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2019

Serie 3

Teilbarkeit, Faktorielle Ringe

1. Sei K ein Körper, und sei $K((X))$ die Menge aller beidseitig unendlichen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in K, für die ein $N \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $a_n = 0$ für alle $n < N$ ist. Diese Folgen schreiben wir als *formale Laurentreihen mit endlichem Hauptteil* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n X^n$.

   (a) Definiere Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $K((X))$ in Analogie zu $K[[X]]$ und zeige, dass damit $K((X))$ ein Körper ist.

   (b) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Quot}(K[[X]]) \cong K((X))$.

*2. Sei S die Menge aller Funktionen $\mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ für alle Teilmengen $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus \mathrm{dom}(f)| < \infty$, so dass $u, v \in \mathbb{R}[X]$ existieren mit $\forall x \in \mathrm{dom}(f)\colon v(x) \neq 0$ und $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$.

   Wir nennen zwei Funktionen $f, g \in S$ *äquivalent*, wenn ihre Werte auf einer geeigneten Teilmenge $X \subset \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ mit $|\mathbb{R} \smallsetminus X| < \infty$ übereinstimmen.

   (a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf S ist. Sei K die Menge ihrer Äquivalenzklassen.

   (b) Definiere Operationen $+$ und $\cdot$ auf K sowie Elemente $0, 1 \in K$, und zeige, dass das Tupel $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper ist.

   (c) Konstruiere einen natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}(X) \xrightarrow{\sim} K$.

   In diesem Sinn ist es einigermassen berechtigt, die Elemente von $\mathbb{R}(X)$ *rationale Funktionen* zu nennen.

3. Sei $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

   (a) Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]^\times$.

   (b) Bestimme alle Primelemente von $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$.

4. Sei K ein Körper. Zeige, dass $K[X^2, X^3] \subset K[X]$ ein Integritätsbereich, aber nicht faktoriell ist.

5. Sei R ein faktorieller Ring.

   (a) Seien $a, b, c \in R$. Zeige:

   $$c|ab,\ \operatorname{ggT}(a,c) \sim 1 \Longrightarrow c|b.$$

   (b) Sei $u \in R^\times$, und seien $p_1, \ldots, p_n$ Primelemente von R. Zeige, dass die Teiler von $up_1 \cdots p_n$ genau die Elemente der Form $v \cdot \prod_{i \in I} p_i$ sind für alle $v \in R^\times$ und alle Teilmengen $I \subset \{1, \ldots, n\}$.

6. Betrachte Elemente $a_1, \ldots, a_n$ eines faktoriellen Rings R. Ein Element $b \in R$ mit $\forall i\colon a_i|b$ heisst *gemeinsames Vielfaches von* $a_1, \ldots, a_n$.

   (a) Zeige, dass ein gemeinsames Vielfaches b von $a_1, \ldots, a_n$ existiert, so dass für jedes gemeinsame Vielfache b' von $a_1, \ldots, a_n$ gilt $b|b'$.

   (b) Zeige, dass dieses *kleinste gemeinsame Vielfache von* $a_1, \ldots, a_n$ eindeutig bis auf Assoziiertheit ist. Wir bezeichnen jedes solche mit $\operatorname{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$.

   (c) Zeige, dass $\operatorname{ggT}(a_1, a_2) \cdot \operatorname{kgV}(a_1, a_2) \sim a_1 \cdot a_2$ gilt.