D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2019

Serie 4

Ideale, Faktorringe, Primideale und Hauptidealringe

1. Zeige, dass für alle Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und alle Elemente x, y eines Rings R gilt
   (a) $(x)(y) = (xy)$
   (b) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$
   (c) $(x) \cdot ((y) \cdot \mathfrak{a}) = (xy) \cdot \mathfrak{a}$

2. Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heisst *nilpotent*, falls ein $n \geqslant 1$ mit $x^n = 0$ existiert. Beweise oder widerlege:
   (a) Die Menge der Nullteiler von R zusammen mit 0 ist ein Ideal von R.
   (b) Die Menge I der nilpotenten Elemente von R ist ein Ideal von R.
   *(c) Zeige: Für I wie in (b) enthält der Faktorring R/I ausser 0 keine nilpotenten Elemente.

3. Betrachte einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to S$ und ein Ideal $\mathfrak{b} \subset S$. Zeige, dass $\mathfrak{a} := \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) := \{a \in R \mid \varphi(a) \in \mathfrak{b}\}$ ein Ideal von R ist und dass φ einen injektiven Ringhomomorphismus $R/\mathfrak{a} \hookrightarrow S/\mathfrak{b}$ induziert.

4. Sei $a \in \mathbb{R}$. Untersuche, wann der Ring $\mathbb{R}[X]/(X^2 + a)$ isomorph zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, beziehungsweise zu $\mathbb{C}$, beziehungsweise zu keinem der beiden ist.

*5. Zeige, dass ein echtes Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ dann und nur dann ein Primideal ist, wenn für beliebige Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ gilt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \implies (\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \text{ oder } \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}).$$

6. Sei R der Ring der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.
   (a) Hat R Nullteiler?
   (b) Zeige, dass R überabzählbar viele maximale Ideale hat.
   *(c) Bestimme alle maximale Ideale von R.
   **(d) Sind alle maximale Ideale von R Hauptideale? Sind sie endlich erzeugt?
   **(e) Gibt es Primideale von R, die keine maximalen Ideale sind?

7. Sei R ein Hauptidealring. Zeige, dass jedes von Null verschiedene Primideal in R maximal ist.