D-MATH | Algebra I | HS 2019
Prof. Richard Pink

Serie 7

Moduln über Hauptidealringen, Jordansche Normalform

1. Sei R ein Integritätsbereich. Für jeden R-Modul M heisst

$$M_{\mathrm{tor}} := \{m \in M \mid \exists r \in R \smallsetminus \{0\}\colon\; rm = 0\}$$

der *Torsionsuntermodul* von M. Ist $M_{\mathrm{tor}} = 0$, so heisst M *torsionsfrei*. Zeige:

   (a) Die Menge M_{tor} ist ein Untermodul von M.

   (b) Der Faktormodul M/M_{tor} ist torsionsfrei.

   (c) Jeder freie Modul ist torsionsfrei.

   (d) Ist R ein Hauptidealring und M endlich erzeugt, so ist M/M_{tor} ein freier Modul.

2. Eine Folge von Elementen $(m_1, \ldots, m_n)$ eines R-Moduls M heisst eine *Basis von* M, wenn jedes Element von M auf eindeutige Weise als $a_1m_1 + \ldots + a_nm_n$ mit $a_i \in R$ darstellbar ist. Besitzt M eine Basis der Länge n, so ist M isomorph zu R^n, also frei vom Rang n.

   Sei nun M ein freier Modul von endlichem Rang n über einem Hauptidealring R. Beweise oder widerlege:

   (a) Jede linear unabhängige Teilmenge von M lässt sich zu einer Basis von M ergänzen.

   (b) Aus jedem Erzeugendensystem von M lässt sich eine Basis von M auswählen.

   (c) Jeder Untermodul von M ist frei vom Rang $\leqslant n$.

3. Sei $A := \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ wie in Aufgabe 4 der Serie 6. Gib einen expliziten Isomorphismus von $\mathbb{Z}^3/A\mathbb{Z}^2$ auf ein direktes Produkt von zyklischen $\mathbb{Z}$-Moduln an.

4. (a) Bestimme alle Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{Z}$-Moduln der Kardinalität 600.

   (b) Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen von endlichen $\mathbb{F}_2[X]$-Moduln der Kardinalität 16.

*5. Seien R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Nach der Vorlesung existieren Zahlen $r, \ell \geqslant 0$ und Primelemente $p_i \in R$ und Exponenten $\nu_i \geqslant 1$, so dass gilt

$$M \cong R^r \boxplus \bigboxplus_{i=1}^{\ell} R/(p_i^{\nu_i}).$$

Zeige: Für jedes Primelement $p \in R$ und jedes $\nu \geqslant 1$ gilt

$$\dim_{R/(p)}(p^\nu M/p^{\nu+1}M) \;=\; r + \left|\{1 \leqslant i \leqslant \ell \mid p_i \sim p \wedge \nu_i > \nu\}\right|.$$

Folgere daraus, dass die Zahlen r und ℓ, sowie die Paare (p_i, ν_i) bis auf Vertauschung und Assoziiertheit der p_i eindeutig bestimmt durch M sind.

*6. Sei K ein Körper. Für zwei $n \times n$-Matrizen über K schreiben wir $A \sim A'$ genau dann, wenn eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $UAU^{-1} = A'$. Für zwei Paare von $n \times n$-Matrizen über K schreiben wir $(A, B) \sim (A', B')$ genau dann, wenn eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $(UAU^{-1}, UBU^{-1}) = (A', B')$.

(a) Für geeignetes n finde vier $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$ und $A'B' = B'A'$ und $A \sim A'$ und $B \sim B'$, aber $(A, B) \not\sim (A', B')$.

(b) Konstruiere $K[X, Y]$-Moduln M und M' von endlicher Dimension über K, die isomorph als $K[X]$- und als $K[Y]$-Moduln sind, aber nicht als $K[X, Y]$-Moduln.

7. Konstruiere die Jordan-Chevalley-Zerlegung der komplexen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

je einmal mit Hilfe des chinesischen Restsatzes wie im Beweis der Zerlegung, und einmal mit Hilfe der Jordan-Normalform von A. Welcher Weg ist schneller?