D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2019

Serie 9

Homomorphismen, Normalteiler, Faktorgruppen, Isomorphiesätze

1. (a) Seien G und H endliche Gruppen von teilerfremder Ordnung. Zeige, dass jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ trivial ist, also $\varphi(x) = 1_H$ für alle $x \in G$.
   (b) Sei G eine Gruppe, und seien H und H' endliche Untergruppen von teilerfremder Ordnung. Zeige, dass $H \cap H' = \{1_G\}$ gilt.

*2. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $m \geqslant 3$ eine endliche Gruppe vom Exponenten m existiert, die nicht abelsch ist.

Hinweis: Untersuche Diedergruppen und Gruppen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} < \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

3. Die *Quaternionengruppe* ist die Untergruppe $Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ der multiplikativen Gruppe der Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$.

Zeige: In Q sind alle Untergruppen normal, aber Q ist nicht abelsch.

4. (a) Zeige: Ist ein Normalteiler N einer Gruppe G im Zentrum von G enthalten und G/N zyklisch, so ist G abelsch.
   (b) Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 4 abelsch ist.

5. Zeige für jede Gruppe G:
   (a) Jede Untergruppe von G, welche die Kommutatorgruppe $[G, G]$ enthält, ist normal. Insbesondere ist $[G, G]$ normal.
   (b) Für jeden Normalteiler $N \lhd G$ gilt

$$[G, G] < N \Longleftrightarrow G/N \text{ ist abelsch.}$$

   (c) Für jede abelsche Gruppe A und jeden Homomorphismus $\varphi : G \to A$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G, G] \to A$, sodass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ ist, wobei $\pi : G \to G/[G, G]$ die kanonische Projektion bezeichnet.

   Bemerkung: Die Faktorgruppe $G/[G, G]$ heisst *Abelisierung* von G, und die genannte Aussage heisst die *universelle Eigenschaft der Abelisierung.*
   (d) Berechne $[G, G]$ und $G/[G, G]$ für $G = D_n$ und alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

6. Seien a and b positive ganze Zahlen. Beweise unter Verwendung der Isomorphiesätze die Identität
$$\mathrm{ggT}(a,b)\cdot\mathrm{kgV}(a,b)=ab.$$

*7. *Lemma von Goursat.* Betrachte Gruppen G_1 und G_2 und eine Untergruppe H von $G_1\times G_2$, so dass die beiden Projektionen $p_i : H\to G_i$ surjektiv sind. Zeige, dass es normale Untergruppen $N_1 \lhd G_1$ und $N_2 \lhd G_2$ gibt mit $(N_1\times N_2)\lhd H$, so dass
$$H/(N_1\times N_2)\ <\ (G_1\times G_2)/(N_1\times N_2)\ \cong\ (G_1/N_1)\times(G_2/N_2)$$
der Graph eines Isomorphismus $G_1/N_1 \xrightarrow{\sim} G_2/N_2$ ist.