Lösung Serie 1

1. Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Betrachten Sie den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V aller Polynome in X mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ vom Grad ≤ 5.

   a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

   $$\begin{aligned} p_1 &:= 1 + X^2 + X^4, \\ p_2 &:= 1 + X + X^3, \\ p_3 &:= 1 + X + X^4 + X^5 \end{aligned}$$

   in V linear unabhängig sind.

   b) Erweitern Sie $\{p_1, p_2, p_3\}$ zu einer Basis von V.

   Lösung:

   a) Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_2$ beliebig und sei

   $$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0.$$

   Es ist zu zeigen, dass $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ gelten muss. Per Definition ist ein Polynom gleich 0 genau dann, wenn all seine Koeffizienten gleich 0 sind. Einsetzen p_1, p_2 und p_3 haben wir

   $$a_3 X^5 + (a_1 + a_3) X^4 + a_2 X^3 + a_1 X^2 + (a_2 + a_3) X + (a_1 + a_2 + a_3) = 0.$$

   Mit Koeffizientenvergleich (Koeffizienten vom Grad $5, 3, 2$) erhalten wir, dass a_3, a_2 und a_1 gleich 0 sein müssen. Daraus folgt, dass die drei Polynome tatsächlich linear unabhängig sind.

   b) Wir betrachten $p_4 := X^2, p_5 := X, p_6 := 1 \in V$. Die gleiche Argumentationsweise wie im ersten Aufgabenteil zeigt, dass $p_1, \ldots, p_6$ linear unabhängig sind. Diese bilden also eine Basis von V genau dann, wenn die Dimension von V gleich 6 ist. Um dies zu zeigen betrachten wir die sechs Vektoren $1, X, X^2, \ldots, X^5 \in V$ und behaupten, dass diese eine Basis von V bilden. Tatsächlich lässt sich per Definition von V jeder seiner Vektoren auf eindeutige Weise als $\mathbb{F}_2$-Linearkombination dieser Vektoren schreiben.

2. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

   $$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$$

   und

   $$\widetilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

a) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $(-24, 8, 19)^T$ bezüglich der Standardbasis. Berechnen Sie den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$, beziehungsweise $[v]_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ von v bezüglich $\mathcal{B}$, beziehungsweise $\widetilde{\mathcal{B}}$.

b) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

a) Wir definieren die Matrix $B := (b_1\ b_2\ b_3)$, wobei b_1, b_2, b_3die Koordinatendarstellungen der Basisvektoren von B bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ sind, die in der Aufgabenstellung explizit gegeben werden, und definieren analog die Matrix $\widetilde{B}$ bezüglich den Vektoren von $\widetilde{\mathcal{B}}$. Sei $[v]_{\mathcal{E}}$ der Koordinatenvektor bezüglich die Standardbasis $\mathcal{E}$, d.h. $[v]_{\mathcal{E}} = (-24, 8, 19)^T$. Dann gilt

$$[v]_{\mathcal{E}} = B[v]_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad [v]_{\mathcal{E}} = \widetilde{B}[v]_{\widetilde{\mathcal{B}}}$$

also,

$$[v]_{\mathcal{B}} = B^{-1}[v]_{\mathcal{E}} \quad \text{und} \quad [v]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = \widetilde{B}^{-1}[v]_{\mathcal{E}}. \tag{1}$$

Die Inverse von B lautet

$$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{bmatrix}$$

und

$$\widetilde{B}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Folglich sind $[v]_{\mathcal{B}} = B^{-1}(-24, 8, 19)^T = (-113, -226, -304)^T$ und $[v]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = \widetilde{B}^{-1}(-24, 8, 19)^T = (35, -43, 35)^T$.

b) Mit (1) sehen wir

$$\begin{aligned} [w]_{\mathcal{B}} &= B^{-1}[w]_{\mathcal{E}} \\ &= B^{-1}\widetilde{B}[w]_{\widetilde{\mathcal{B}}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0.$$

Sei V der Raum all ihrer reellwertigen Lösungen.

a) Zeigen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist.

b) Finden Sie eine Basis von V.

c) Finden Sie vier Vektoren in V, so dass je zwei dieser Vektoren linear unabhängig sind.

Lösung:

a) Wegen der Linearität des Differenzierens ist für beliebige $g, h \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch $g + h \in V$ und $\alpha g \in V$. Hierbei ist die Addition $g + h$ definiert durch die Addition im Zielbereich $\mathbb{R}$ der beiden Funktionen und die Skalarmultiplikation αg durch die Multiplikation im Zielbereich $\mathbb{R}$ von g.

b) Das zur Differentialgleichung gehörende charakteristische Polynom $\lambda^2 + \lambda - 2$ hat Nullstellen 1 und -2. Die allgemeine Theorie aus der Analysis zu solchen linearen homogenen Differentialgleichungen liefert nun $\{e^x, e^{-2x}\}$ als Basis von V.

c) Wir nehmen zu den Vektoren $e_1 := e^x$ und $e_2 := e^{-2x}$ noch die Vektoren $e_3 := e_1 + e_2$ und $e_4 := e_1 - e_2$ hinzu. Dass nun je zwei dieser vier Vektoren linear unabhängig sind, kann man in jedem der Fälle auf die lineare Unabhängigkein von e_1 und e_2 zurückführen. Zum Beispiel, behandlen wir e_3 und e_4: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ belibig und

$$ae_3 + be_4 = 0,$$

das heisst,

$$(a + b)e_1 + (a - b)e_2 = 0.$$

Da e_1 und e_2 linear unabhängig sind, folgt

$$a + b = 0 \quad \text{und} \quad a - b = 0.$$

Daraus folgt, $a = b = 0$.

4. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

und

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Sei ψ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit Matrixdarstellung

$$\psi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\psi_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ von ψ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Lösung: Wir bezeichnen mit $\psi_{\mathcal{B}}$ die Matrixdarstellung von ψ und mit L die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\widetilde{\mathcal{B}}$. Mit derselben Notation wie in der Lösung der Aufgabe gilt $L = \widetilde{B}B^{-1}$. Somit ist die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$ gegeben durch $\psi_{\widetilde{\mathcal{B}}} = L\psi_{\mathcal{B}}L^{-1}$.

Wir berechnen L und L^{-1} und erhalten

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Somit ist

$$\psi_{\widetilde{\mathcal{B}}} = L\psi_{\mathcal{B}}L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \\ 7 & 11 & -7 \end{bmatrix}.$$

5. Seien x und y (Spalten-)Vektoren und A und B Matrizen.

   a) Schreiben Sie die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention.

      i) $x^T y$

      ii) $x^T A y$

      iii) $(B^T x)^T A$

   b) Sei $A_{ij} = i - j$. Zeigen Sie, dass $A_{ij}x^i x^j = 0$.

   Lösung:

   a) i) $x_i y^i$

      ii) $x_i A^i_j y^j$

      iii) $x_k B^k_i A^i_j$.

   b) Für jedes Tupel (i, j) mit $i = j$ ist $A_{ij} = 0$. Um $A_{ij}x^i x^j$ zu berechnen brauchen wir daher nur die Terme $(i - j)x^i x^j$ von Tupeln (i, j) mit $i \neq j$ zu summieren. Wir paaren nun ein solches Tupel (i, j) mit dem Tupel (j, i) und sehen, dass die Summe ihrer Terme $(i - j)x^i x^j + (j - i)x^j x^i$ gleich 0 ist. Folglich lässt sich $A_{ij}x^i x^j$ schreiben als eine Summe über Paare von Tupeln deren zugehöriger Summan jeweils 0 ist. Also ist auch $A_{ij}x^i x^j = 0$.