Lösung Serie 2

1. Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektionen auf die Ebene

$$E_1 : x + 3y = 2z \quad \text{bzw.} \quad E_2 : x = y$$

   a) Geben Sie die Matrix von $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an.

   b) Finden Sie für jede der Abbildungen eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass die jeweilige Matrixdarstellung der Abbildung bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat. Für $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ finden Sie je eine Basis, die zusätzlich orthogonal ist.

Lösung:

   a) Wir machen eine Rechung analog jener in Beispiel 2.21 des Skripts. Für die Ebene E_1 betrachten wir die Basis

$$\mathcal{B}_1 \coloneqq \{v_1, v_2, v_3\} \coloneqq \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \}.$$

Diese haben wir so gewählt, weil v_1 und v_2 beide in E_1 liegen und linear unabhängig sind, und weil $v_3 = v_1 \times v_2$ orthogonal zu E_1 liegt. Die Abbildung $\mathcal{P}_1$ ist charakterisiert durch $\mathcal{P}_1|_{E_1} = Id_{E_1}$ und $\mathcal{P}_1|_{E_1^\perp} = 0$ oder, äquivalent dazu, $\mathcal{P}_1 v_i = v_1$ für $i = 1, 2$ und $\mathcal{P}_1 v_3 = 0$. Es muss also

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gelten. Die Transformationsmatrix von der Standardbasis $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}_1$ ist gegeben durch

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Damit ist

$$L^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

und folglich

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{E}} = L\, [\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1}\, L^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Analog gehen wir zur Berechnung von $[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{E}}$ vor. Wir betrachten dazu

$$\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3\} := \{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \}$$

und bemerken, dass $\mathcal{P}_1$ bezüglich $\mathcal{B}_2$ dieelben Eigenschaften haben muss, die wir oben für $\mathcal{P}_1$ bezüglich $\mathcal{B}_1$ ausformuliert haben. Die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}_1$ ist

$$K = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

mit Inverse

$$K^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & -1\\0 & 10 & 1\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

Wir erhalten damit

$$[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{E}} = K\,[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{B}_2}\,K^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Die Matrixdarstellung von $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ ist nun

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{E}}\,[\mathcal{P}]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & 5 & 2\\1 & 1 & 6\\4 & 4 & 10\end{bmatrix}.$$

b) Der Bewies des Gram-Schmidt Verfahrens liefert v_1 und $v_2' := v_2 - \frac{<v_1,v_2>}{<v_1,v_1>}v_1$ als orthogonale Basis von E_1 und $w_2' := w_2 - \frac{<w_1,w_2>}{<w_1,w_1>}w_1$ als orthogonale Basis von E_2. Beachte, dass nach Konstrution, v_2' noch in E_1 liegt und insbesondere noch orthogonal zu v_3 ist, sowie auch w_2' noch orthogonal zu w_3 ist. Explizit ist

$$v_2' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\1\\4\end{bmatrix}, w_2' = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Bezüglich der orthogonalen Basis $\{v_1, v_2', v_3\}$ bzw. $\{w_1, w_2', w_3\}$ hat $\mathcal{P}_1$ bzw. $\mathcal{P}_2$ Darstellungsmatrix in Diagonalgestalt (die Diagonaleinträge sind $0, 0, 1$).

Wir betrachten jetzt $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$. Um $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ in Diagonalgestalt zu vorstellen, brauchen wir eine Basis aus Eigenvektoren von $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$. Die Eigenvektoren liegen im Kern oder im Bild der Abbildung. Ihrer Matrixdarstellung entnehmen wir, dass diese Abbildung eindimensionalen Kern hat (genau zwei Spalten der Matrix sind linear abhängig).

Da w_3 im Kern von $\mathcal{P}_2$ liegt, liegt auch im Kern von $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ und somit wird der Kern von w_3 aufgespannt. Die restlichen zwei Vektoren einer Eigenbasis der Abbildung müssen im Bild liegen, das heisst, sie liegen in E_1. Wir beachten, dass jeder nicht verschwindende Vektor in $E_1 \cap E_2$ wegen der Projektionseigenschaft von $\mathcal{P}_1$ und von $\mathcal{P}_2$ ein Eigenvektor von $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ ist. Zum Beispiel ist

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in E_1 \cap E_2.$$

Die beiden Vektoren w_3 und x lassen sich nun zu einer Eigenbasis vervollständigen indem wir noch einen nichtnullen Vektor $y \in E_1$ hinzunehmen, der orthogonal zu x ist, zum Beispiel

$$y := v_2 - \frac{< x, v_2 >}{< v_2, v_2 >} x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Es kann direkt nachgerechnet werden, dass y ein Eigenvektor ist. Ausserdem, man beachte, dass x und y, sowie x und w_3 zueinander orthogonal sind, nicht aber y und w_3.

Bemerkung: Man kann direkt die Eigenvektoren von $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ berechnen, indem man die Matrixdarstellung bzgl. $\mathcal{E}$ aus Teilaufgabe a) nutzt.

2. Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Multiplikation mit einem Element $z = s + it \in \mathbb{C}$ definiert eine lineare Abbildung $\psi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Geben Sie die Matrixdarstellung von ψ_z bezüglich der Standardbasis $\{1, i\}$ und bezüglich $\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$ an.

Lösung: Sei $v = a + bi \in \mathbb{C}$ mit Koordinatenvektor $[v]_{\{1,i\}} = (a\, b)^T$. Dann hat $\psi_z(v) = zv = (as - bt) + i(at + sb)$ Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} as - bt \\ at + sb \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$[\psi_z]_{\{1,i\}} = \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix}.$$

Die Basis $\mathcal{B} = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$ entsteht aus $\{1, i\}$ durch Multiplikation mit $e^{i\frac{\pi}{4}}$ in $\mathbb{C}$. Also ist $L := [\psi e^{i\frac{\pi}{4}}]_{\{1,i\}}$ die Transformationsmatrix des Basiswechsel von $\{1, i\}$ nach $\mathcal{B}$ und somit

$$[\psi_z]_{\mathcal{B}} = L^{-1} [\psi_z]_{\{1,i\}} L.$$

Nun korrispondieren alle Matrizen auf der rechten Seite zur Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{C}$. Weil Multiplikation in $\mathbb{C}$ kommutativ ist, kommutieren diese Matrizen miteinandern. Wir folgern

$$[\psi_z]_{\mathcal{B}} = [\psi_z]_{\{1,i\}}.$$

3. Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diese bilden gemeinsam eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Sei $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Basisvektoren $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^* = \{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

Zur Erinnerung: Diese ist charakterisiert durch die Eigenschaft, dass $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$ für alle $i, j = 1, \ldots, 3$, wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Lösung: Das Transformationsverhalten von Basen beim Übergang zu ihren Dualbasen wird zum Beispiel in Behauptung 3.13 des Skripts allgemein erklärt. Sei nun hier L die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$, das heisst

$$(b_1\ b_2\ b_3) = (e_1\ e_2\ e_3)L = L.$$

Ihre Inverse ist

$$\Lambda \coloneqq L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Für die Dualbasen gilt dann $\beta^j = \Lambda^i_j \epsilon^j$, oder anders ausgedrückt

$$\begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix} = L^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^3 \end{pmatrix}.$$

Der Koordinatenvektor von β^i bezüglich $\mathcal{E}^*$ ist also gegeben durch die i-te Zeile von L^{-1}.

4. Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit Matrix

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis und bezeichne ϕ^* die zu ϕ duale Abbildung. Sei $v \coloneqq e_1 + 2e_2 + 3e_3 \in \mathbb{R}^3$ und $f \coloneqq \epsilon^1 - 2\epsilon^2 + 3\epsilon^3 \in (\mathbb{R}^3)^*$.

Zur Erinnerung: Die duale Abbildung ϕ^* zu ϕ ist die Abbildung $\phi^* : V^* \to V^*$, so dass für $f \in V^*, v \in V$ gilt

$$\phi^*(f)(v) = f(\phi(v)).$$

a) Schreiben Sie $\phi^*(f)$ in der Basis $\{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$.

b) Berechnen Sie $\phi^*(f)(v)$.

Lösung: Im allgemein gilt folgendes:

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von einem Vektorraum V und bezeichne $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \ldots, \beta^n\}$ ihre duale Basis von V^*. Sei $v \in V$ mit Koordinatenvektor $(v^1 \ldots v^n)^T$ bezüglich $\mathcal{B}$ und sei $f \in V^*$ mit Koordinatenvektor $(f_1 \ldots f_n)$ bezüglich $\mathcal{B}^*$. Dann gilt

$$f(v) = (f_1 \ldots f_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

oder kürzer $f(v) = f_i v^i$. Sei zudem $\psi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix A bezüglich $\mathcal{B}$ und mit dualer Abbildung ψ^*. Dann hat $\psi^*(f)$ Koordinaten $(f_1 \ldots f_n)A$ bezüglich $\mathcal{B}^*$.

In dieser Aufgabe wenden wir diese beiden Tatsachen auf den Fall $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ und $\psi = \phi$ an.

a) Die Koordinaten von f bzgl $\mathcal{E}^*$ sind $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Gemäss der obene Diskussion hat $\phi^*(f)$ bezüglich $\mathcal{E}^*$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet $\phi^*(f) = 6\epsilon^1 - \epsilon^2 + 3\epsilon^3$.

b) Nach Definition gilt es $\phi^*(f)(v) = f(\phi(v))$ und $[v]_{\mathcal{E}} = (1\ 2\ 3)^T$. Aus der Identität (1) folgt

$$\phi^*(f)(v) = f(\phi(v)) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 - 2 + 9 = 13.$$