Lösung Serie 3

1. a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ definiert.

b) Sei $\mathcal{B}^*$ ihre duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren von $\mathcal{B}^*$ bezüglich der Standardbasis von $(\mathbb{R}^3)^*$.

Lösung:

a) Zu zeigen ist die lineare Unabhängigkeit der Vektoren von $\mathcal{B}$ mittels einer Rechnung, welche wir hier nicht ausführen. Das Prinzip ist bekannt aus der linearen Algebra.

b) Sei $\mathcal{E}$ die standard Basis von $\mathbb{R}^3$ mit dualer Basis $\mathcal{E}^*$. Wir suchen den Koordinatenvektor von β^i bezüglich $\mathcal{E}^*$, d.h. wir suchen $[\beta^i]_{\mathcal{E}^*}$. Es gilt

$$[\beta^i]_{\mathcal{E}^*} = [\beta^i]_{\mathcal{B}^*} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}},$$

wobei $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ ist.
Es gilt $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}$, wobei $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist. Die j-te Spalte von $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ ist der Koordinatenvektor $[b_j]_{\mathcal{E}}$. Somit ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

mit Inverse

$$L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = (L_{\mathcal{B}\mathcal{E}})^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{45} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{45} \end{bmatrix}.$$

Beachten Sie nun, dass $[\beta^i]_{\mathcal{B}^*} L_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = i$-te Zeile von $L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. Also

$$[\beta^1]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$
$$[\beta^2]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$
$$[\beta^2]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} \frac{4}{45} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{45} \end{pmatrix}.$$

2. Betrachten Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie den $(0,1)$-Tensor T mit den Eigenschaften

$$T(v_1) = 2,\ T(v_2) = 1,\ T(v_3) = -2.$$

b) Bestimmen Sie $T(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix})$.

c) Finden Sie eine Basis von $W \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0\}$.

Lösung: Wir suchen eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, d.h. $T \in (\mathbb{R}^3)^*$. Wir schreiben T bzgl. der standard Dualbasis $\mathcal{E}^*$ als

$$[T]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}.$$

Dann ist für $v = \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

$$T(v) = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = ax + by + cz.$$

a) Die drei Bedingungen an T entsprechen dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a - b + c &= 2 \\ -b + c &= 1 \\ b &= -2. \end{aligned}$$

Wir lösen es und erhalten

$$[T]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $T(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = -6.$

c) Wir suchen eine Basis von $W = \mathrm{Ker}(T)$. Da T linear ist und $\mathrm{Bild}(T) \neq \{0\}$ (siehe zB Teilaufgabe b)), hat $\mathrm{Ker}(T)$ Dimension 2.
Es ist einfach zu sehen, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

im Kernel von T liegen und dass sie linear unabhängig sind. Somit bilden sie eine Basis von W.

3. Sei T_v der zu
$$v \coloneqq \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
assozierte $(1,0)$-Tensor. Weiter seien
$$f \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ g \coloneqq \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^*)^3.$$
Berechnen Sie $T_v(4f - g)$ und $T_v(2f + g)$.
Lösung: Nach Definition ist $T_v : (\mathbb{R}^3)^* \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(v)$.
Also gilt
$$T_v(4f - g) = (4f - g)(v) = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & -9 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -22,$$
und
$$T_v(2f + g) = (2f + g)(v) = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 3 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -2.$$

4. Sei T der $(0,3)$-Tensor von $\mathbb{R}^3$ definiert durch
$$T(e_i, e_j, e_k) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } j = k \\ i \cdot j \cdot k, & \text{sonst,} \end{cases}$$
wobei $1 \le i, j, k \le 3$. Berechnen Sie $T\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Big)$.
Lösung: Für Vektoren
$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
folgt aus der Multilinearität von T, dass
$$T\Big(\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix} \Big) = a^i b^j c^k T(e_i, e_j, e_k) = a^i b^j c^k T_{ijk},$$
wobei $T_{ijk} \coloneqq T(e_i, e_j, e_k)$. In unserem Fall ist $T_{ijk} \neq 0$ genau dann, wenn $i \neq j$ und $j \neq k$. Zudem ist $b^2 = 0$, so dass alle Summanden verschwinden, in denen b^2 als Faktor auftritt. Es verbeliben 8 Summanden zu berechnen, nämlich jene zu den Tripeln (i, j, k) für die $j = 1$ und $2 \le i, k \le 3$ oder $j = 3$ und $1 \le i, k \le 2$. Schliesslich erhalten wir $a^i b^j c^k T_{ijk} = -7$.

5. Betrachten Sie zu $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ den $(1,1)$-Tensor T von $\mathbb{R}^3$ mit Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & a & b \end{bmatrix}$$

bezüglich den Standardbases, d.h. $A^i_j = T(\varepsilon^i, e_j)$. Seien $f, g \in (\mathbb{R}^3)^*$ mit Koordinaten

$$[f]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } [g]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie alle Tupel (a,b) so, dass für den zu ihnen betrachteten Tensor T gilt

$$T(f,v) = 9 \quad \text{und} \quad T(g,v) = 19.$$

Lösung: T ist eine multilineare Abbildung $T : (\mathbb{R}^3)^* \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Aus der Multilinearität folgt, dass für $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ und $v \in \mathbb{R}^3$:

$$T(f,v) = [f]_{\mathcal{E}^*} A [v]_{\mathcal{E}}.$$

Wir berechnen

$$T(f,v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 27 - 9a + 3b \overset{!}{=} 9.$$

$$T(g,v) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 13 + 3a - b \overset{!}{=} 19.$$

Die Lösungen des Systems sind genau die Paare (a,b) für welche $3a - b = 6$.