Lösung Serie 4

1. Sei $V := \mathbb{R}^3$. Sei $v := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T \in V$ mit zugehörigem $(1,0)$-Tensor T_v und sei $f := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in V^*$ mit zugehörigem $(0,1)$-Tensor T_f. Berechnen Sie
$$T_v \otimes T_f \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung: Nach Definition von Tensorprodukt rechnen wir

$$\begin{aligned} T_v \otimes T_f \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) &= T_v \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \right) \cdot T_f \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -5(-4) = 20. \end{aligned}$$

2. Sei $V := \mathbb{R}^2$. Der $(3,0)$-Tensor T sei bezüglich der Standardbasis $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ von V^* definiert durch
$$T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k) := \begin{cases} i + i, & \text{falls } k = 1 \\ i - j, & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$

   a) Berechnen Sie $T(\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix})$.

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der zur Basis
$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Lösung: Wir setzen $T^{i,j,k} := T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k)$. Dann gilt
$$T^{i,j,1} = i + j \text{ und } T^{i,j,2} = i - j.$$

   a) Der Wert von T an einem beliebigen Element $(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}) \in (V^*)^3$ ist definiert durch
$$T(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}) = \alpha_i \beta_j \gamma_k T^{i,j,k},$$

wobei wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet haben und $1 \leq i, j, k \leq 2$. Dann

$$\begin{aligned} T\big(\begin{pmatrix}-1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\big) &= \alpha_1\beta_1\gamma_1 T^{1,1,1} + \alpha_2\beta_1\gamma_1 T^{2,1,1} + \alpha_1\beta_2\gamma_1 T^{1,2,1} \\ &\quad + \alpha_1\beta_1\gamma_2 \underbrace{T^{1,1,2}}_{=0} + \alpha_1\beta_2\gamma_2 T^{1,2,2} + \alpha_2\beta_2\gamma_1 T^{2,2,1} \\ &\quad + \alpha_2\beta_1\gamma_2 T^{2,1,2} + \alpha_2\beta_2\gamma_2 \underbrace{T^{2,2,2}}_{=0} \\ &= -3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \\ &= 30. \end{aligned}$$

b) Wir wenden die Formel aus Abschnitt 5.2 des Skripts an. Die Basistransformationsmatrix von der Standardbasis nach $\mathcal{B}$ ist

$$L := L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$\Lambda := L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben $\widetilde{T}^{l,m,n}$ für die (l, m, n)-te Koordinate von T bezüglich $\mathcal{B}$, wobei $1 \leq l, m, n \leq 2$. Dann

$$\widetilde{T}^{l,m,n} = \Lambda^l_i \Lambda^m_j \Lambda^n_k T^{i,j,k},$$

wobei Λ^u_v den Matrixeintrag von Λ in der u-ten Zeile und der v-ten Spalte bezeichne. Eine Rechnung liefert nun

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{1,1,1} &= 0, \\ \widetilde{T}^{1,1,2} &= 4, \\ \widetilde{T}^{1,2,1} &= 1, \\ \widetilde{T}^{1,2,2} &= -8, \\ \widetilde{T}^{2,1,1} &= -1, \\ \widetilde{T}^{2,1,2} &= -6, \\ \widetilde{T}^{2,2,1} &= 0, \\ \widetilde{T}^{2,2,2} &= 12. \end{aligned}$$

3. Sei $V := \mathbb{R}^3$. Der $(0, 2)$-Tensor sei bezüglich der Standardbasis von V definiert durch

$$T := \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Berechnen Sie $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

Hinweis: Rechnen Sie mit den Koordinaten aus a).

Lösung:

Wir wenden die Formel (3.15) aus Abschnitt 3.2.3 des Skripts an. Die Basistransformationsmatrix von der Standardbasis nach der Basis $\mathcal{B}$ ist

$$L := L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$\Lambda := L^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Sei $\widetilde{T}$ die Matrix des $(0,2)$-Tensors bezüglich die Basis $\mathcal{B}$. Die Formel (3.15) lautet

$$\widetilde{T} = L^{\mathsf{T}} T L.$$

Eine Rechnung liefert

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis der Formel (3.15): Wir schreiben $\widetilde{T}_{m,n}$ für die (m,n)-te Koordinate von T bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, wobei $1 \leq m, n \leq 3$. Dann

$$\widetilde{T}_{m,n} = L^i_m L^j_n T_{i,j},$$

wobei L^u_v den Matrixeintrag von L in der u-ten Zeile und der v-ten Spalte bezeichne.
Für A eine 3×3 Matrix bezeichne

$$A_{ij} = \text{ Matrixeintrag von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte.}$$

Dann gilt für die Einträge der Transponierte Matrix A^{T}

$$(A^{\mathsf{T}})_{ij} = A_{ji}$$

und die Einträge des Produkts von $A, B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ sind

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj}.$$

In unserem Fall folgt aus dieser Überlegung, dass

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{m,n} = L^i_m L^j_n T_{i,j} = L^i_m & \underbrace{T_{i,j} L^j_n}_{=\sum_{j=1}^3 T_{i,j} L^j_n = (TL)_{in}} \\
&= L^i_m (TL)_{in} \\
&= (L^T)^m_i (TL)_{in} \\
&= \sum_{i=1}^{3} (L^{\mathsf{T}})_{mi} (TL)_{in} \\
&= (L^{\mathsf{T}} TL)_{mn}.
\end{aligned}$$

b) Für zwei vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ seien $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$ und $[w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^T$. Dann ist $T(v, w) = v_i w_j \widetilde{T}_{i,j}$.
Die Basis $\mathcal{B}$ ist geeignet, um die Rechnung zu führen, denn viele Einträge gleich 0 sind.
Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$[v]_{\mathcal{B}} = \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } [w]_{\mathcal{B}} = \Lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
T(v, w) &= v_i w_j \widetilde{T}_{i,j} = v_1 w_1 \widetilde{T}_{1,1} + v_2 w_2 \widetilde{T}_{2,2} + v_3 w_3 \widetilde{T}_{3,3} \\
&= 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \\
&= 20.
\end{aligned}$$

4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasis $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ und $\Delta : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ eine Determinantenfunktion mit $\Delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) = 5$.

   a) Sei $\Delta_{ijk} := \Delta(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)$. Bestimmen Sie Δ_{ijk} für alle $1 \leq i, j, k \leq 3$.

   b) Zeigen Sie, dass für drei vektoren $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T, v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T, w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Delta(u, v, w) = -5 \det \left(\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right),$$

   wobei $\det(A)$ die Determinante der 3×3-matrix A bezeichnet.

Lösung:

a) Aus den Eigenschaften einer Determinantenfunktion wissen wir, dass

$$\Delta_{ijk} = 0 \text{ genau dann, wenn } i = j \text{ oder } j = k \text{ oder } i = k.$$

Ausserdem, gilt es $\Delta_{321} = 5$, und somit $\Delta_{231} = -5$, $\Delta_{213} = 5$, $\Delta_{123} = -5$, $\Delta_{132} = 5$, $\Delta_{312} = -5$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(u, v, w) &= u^i v^j w^k \Delta_{ijk} \\
&= u^3 v^2 w^1 \Delta_{321} + u^2 v^3 w^1 \Delta_{231} + u^2 v^1 w^3 \Delta_{213} \\
&\quad + u^1 v^2 w^3 \Delta_{123} + u^1 v^3 w^2 \Delta_{132} + u^3 v^1 w^2 \Delta_{312} \\
&= u^3 v^2 w^1 5 + u^2 v^3 w^1 (-5) + u^2 v^1 w^3 5 + u^1 v^2 w^3 (-5) + u^1 v^3 w^2 5 + u^3 v^1 w^2 (-5) \\
&= -5 \cdot \left(-u^3 v^2 w^1 + u^2 v^3 w^1 - u^2 v^1 w^3 + u^1 v^2 w^3 - u^1 v^3 w^2 + u^3 v^1 w^2 \right) \\
&= -5 \cdot \left(u^1 (v^2 w^3 - v^3 w^2) + u^2 (v^3 w^1 - v^1 w^3) + u^3 (v^1 w^2 - v^2 w^1) \right) \\
&= -5 \cdot \left(u^1 (v^2 w^3 - v^3 w^2) - u^2 (v^1 w^3 - v^3 w^1) + u^3 (v^1 w^2 - v^2 w^1) \right) \\
&= -5 \cdot \left(u^1 \det\left(\begin{pmatrix} v^2 & w^2 \\ v^3 & w^3 \end{pmatrix} \right) - u^2 \det\left(\begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^3 & w^3 \end{pmatrix} \right) u^3 \det\left(\begin{pmatrix} v^1 & w^1 \\ v^2 & w^2 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= -5 \det\left(\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$