Lösung Serie 5

1. Sei $V := \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} \right\},$$

welche bezüglich dem Standard-Skalarprodukt orthogonal ist.

a) Bestimmen Sie die zu $\mathcal{B}$ gehörige orthonormierte Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$.

b) Sei $v := \begin{pmatrix}7\\-3\\2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von v bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Lösung:

a) Wir teilen jeden der Vektoren durch seine Norm und bekommen

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} =: \{\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \widetilde{b}_3\}.$$

b) Der Koordinatenvekor von v bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$ ist

$$\begin{pmatrix}\langle v, \widetilde{b}_1\rangle\\ \langle v, \widetilde{b}_2\rangle\\ \langle v, \widetilde{b}_2\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{3}}\\ -\frac{15}{\sqrt{6}}\\ -\frac{5}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Gleichung liefert allgemein den Koordinatenvektor eines Vektors v bezüglich einer orthogonalen Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$.

2. Das Skalarprodukt T sei bezglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix}35 & -5 & -27\\ -5 & 11 & 9\\ -27 & 9 & 27\end{pmatrix}.$$

a) Konstruieren Sie mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren eine bezüglich T orthogonale Basis $\mathcal{B}$.

b) Bestimmen Sie die Matrix von T bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung:

a) Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\langle v, w\rangle \coloneqq T(v,w) = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 & -5 & -27 \\ -5 & 11 & 9 \\ -27 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$$

das Skalarprodukt von v und w bezüglich T. Es bezeichne $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die zugehörige Norm von v. Wir wenden nun das Gram-Schmidt-Verfahren an auf die Standardbasis $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ und dieses Skalarprodukt. Wir bekommen

$$b_1 \coloneqq \frac{1}{\|\varepsilon_1\|}\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2' \coloneqq \varepsilon_2 - \langle \varepsilon_2, b_1\rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-5}{\sqrt{35}}\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_2 \coloneqq \frac{b_2'}{\|b_2\|} = \sqrt{\frac{7}{72}} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} b_3' &\coloneqq \varepsilon_3 - \langle \varepsilon_3, b_1\rangle b_1 - \langle \varepsilon_3, b_2\rangle b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-27}{\sqrt{35}}\frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{7}{72}}\frac{36}{7}\sqrt{\frac{7}{72}} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{27}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{36}{72} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{27}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{27}{35} - \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b_3 = \frac{1}{\|b_3'\|} b_3'$$

b) Die Matrix von T bezüglich $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ist die Matrix mit Einträge $T_{ij} = T(b_i, b_j)$. Da die Basis $\mathcal{B}$ orthogonal bezüglich T ist, gilt es $T(b_i, b_j) = \delta_{ij}$. Das bedeutet, dass die Matrix von T bezüglich $\mathcal{B}$ die Identitätsmatrix ist.

3. Sei $V := \mathbb{R}^3$.

   a) Ergänzen Sie $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit Hilfe des Vektorprodukts zu einer bezüglich dem Standard-Skalarprodukt orthogonalen Basis $\mathcal{B}$.

   b) Sei L die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zu $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie $L^\mathsf{T} L$.

Lösung:

a) Wir beachten zuerst, dass die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind. Das Vektorprodukt von zwei Vektoren ist ein Vektor, der orthogonal zu beiden Vektoren ist. Es gilt

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig und somit bildet $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$.

b) Die j-te Spalte von L ist der Koordinatenvektor von v_j in der Standardbasis:

$$L = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

und

$$L^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} - & v_1^\mathsf{T} & - \\ - & v_2^\mathsf{T} & - \\ - & v_3^\mathsf{T} & - \end{pmatrix}.$$

Es ist dann klar, dass der ij-te Eintrag der Matrix $L^\mathsf{T} L$ ist

$$(L^\mathsf{T} L)_{ij} = v_i^\mathsf{T} v_j = (v_i, v_j)$$

wobei (v_i, v_j) das Standardskalarprodukt von v_i und v_j ist. Die Basis $\mathcal{B}$ ist orthogonal bezüglich dem Standardskalarprodukt, also ist

$$L^\mathsf{T} L = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & 0 & 0 \\ 0 & (v_2, v_2) & 0 \\ 0 & 0 & (v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 66 \end{pmatrix}$$

4. Zeigen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms, dass die Eigenwerte einer reellen symmetrischen 2×2-Matrix reell sind.

   Lösung: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine symmetrische reelle Matrix. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des characteristischen Polynom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}\right) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 \\ &= \lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2. \end{aligned}$$

   Die Nullstellen von p_A sind

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac - b^2)}) \\ &= \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2}) \\ &= \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2}) \\ &= \frac{1}{2}(a + c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}). \end{aligned}$$

   Der Term unter der Wurzel ist $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ und so ist immer reell. Somit sind die Nullstellen (=Eigenwerten von A) immer reell.

5. Sei $V := \mathbb{R}^2$. Gegeben sei die symmetrische Bilinearform $T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

   b) Ist T negativ definit?

   c) Finden Sie zwei bezüglich T zueinander orthogonale Eigenvektoren.

   Lösung:

   a) Es ist $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -10.$

   b) T ist negativ definit, falls für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt $v^\mathsf{T} T v < 0$. Aber zum Beispiel $e_1^\mathsf{T} T e_1 = T_{11} = 2 > 0$.

   c) ***Lemma*** Falls T symmetrisch ist, dann sind Eigenvektoren von T zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal bezüglich T.

      Beweis. Seien $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von T zu Eigenwerten $\lambda \neq \mu$, das heisst es gilt

$$Tv = \lambda v \text{ und } Tw = \mu w.$$

Da T symmetrisch ist, gilt auch

$$v^\top T = v^\top T^\top = (Tv)^\top = (\lambda v)^\top = \lambda v^\top.$$

Daraus folgt

$$v^\top T w = \mu v^\top w = \frac{\mu}{\lambda} \lambda v^\top w = \frac{\mu}{\lambda} v^\top T w.$$

Aber $\frac{\mu}{\lambda} \neq 1$, somit muss es $v^\top T w = 0$ gelten, d.h. v, w sind bezüglich T orthogonal. $\square$

Also möchten wir zwei Eigenvektoren von T finden. Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda \mathbb{1}) = (2-\lambda)^2 - 25$, welche $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 7$ sind. Die Eigenvektoren findet man durch das Lösen von

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Man findet $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.