Lösung Serie 6

1. Sei V ein reeller Vektorraum und $\Psi : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion mit zugehörige symmetrische Bilinearfunktion T.

   a) Zeigen Sie, dass der Ausartungsraum von Ψ ein Untervektorraum von V ist.

   b) Sei $V := \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine symmetrische Bilinearfunktion T auf V mit nicht-trivialem Auswartungsraum.

   Lösung:

   a) Bezeichne W den Ausartungsraum von Ψ und seien $u, w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es genugt zu zeigen, dass dann auch $\lambda u + w \in W$, d.h. $T(\lambda u + w, v) = 0$ für alle $v \in V$. Die Bilinearität von T gibt nun

   $$T(\lambda u + w, v) = \lambda \underbrace{T(u, v)}_{=0} + \underbrace{T(w, v)}_{=0} = 0.$$

   b) Jede symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Sym}_{2,2}(\mathbb{R})$ definiert eine symmetrische Bilinearfunktion T_A auf $\mathbb{R}^2$ durch

   $$T_A(v, w) := v^\mathsf{T} A w, \quad \text{für alle } v, w \in \mathbb{R}^2.$$

   Sei Ψ_A die zugehörige quadratische Funktion und W der Ausartungsraum. Wir zeigen, dass falls $\det(A) = 0$, dann gilt $W \neq \{0\}$.

   Beweis. Sei $0 \neq A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}_{2,2}(\mathbb{R})$ mit $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ und sei

   $$T_A(v, w) := v^\mathsf{T} A w = w_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + w_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2)$$

   Falls $a_{12} \neq 0$, sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_{11}}{a_{12}} \end{pmatrix}$. Dann

   $$\begin{aligned} w_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + w_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2) &= \\ &= w_1(a_{11} - a_{12}\frac{a_{11}}{a_{12}}) + w_2(a_{12} - a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}}) \\ &= w_1 \cdot 0 + w_2(\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{12}}) \\ &= \frac{w_2}{a_{12}} \det(A) = 0 \end{aligned}$$

   für alle $w \in \mathbb{R}^2$. Das heisst, $v \in W$. Falls $a_{12} = 0$, dann ist $a_{11} \neq 0$ oder $a_{22} \neq 0$. Im ersten Fall betrachte $v := \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 1 \end{pmatrix}$ und im zweiten Fall betrachte $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_{12}}{a_{22}} \end{pmatrix}$. $\square$

Es folgt, dass z.B. für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $T_A(v,w) = v^\mathsf{T} A w$ gilt es $W \neq \{0\}$. Insbesondere ist $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in W$.

2. Sei $n \geq 1$ und $V := \mathbb{R}^n$. Sei Ψ eine quadratische Funktion und $u \in V$, so dass $\Psi(u) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\{v \in V \mid T(u,v) = 0\}$$

ein $(n-1)$-dimensionaler Untervktorraum von V ist, wobei T die zugehörige symmetrische Bilinearfunktion ist.

Lösung: Wir betrachten die Abbildung $f : V \to \mathbb{R}, f(v) := T(u,v)$. Wegen der Bilinearität von T ist f linear. Nun ist

$$\{v \in V \mid \Psi(u,v) = 0\} = \operatorname{Kern}(f)$$

und folglich ein Untervektorraum von V. Wir wenden die Dimensionsformel für Kernel und Bild von linearen Abbildungen auf f an und bekommen

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = n - \dim \operatorname{Bild}(f) = n - 1.$$

Bei der letzter Gleichung haben wir verwendet, dass $f(u) = T(u,u) = \Psi(u) \neq 0$ und also $\operatorname{Bild}(f) = \mathbb{R}$.

3. a) Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich der A Diagonalform hat und bestimmen Sie die Matrix von A bezüglich dieser Basis.

   b) Sei $B := \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich der B Diagonalform hat und bestimmen Sie die Matrix von B bezüglich dieser Basis.

Hinweis: Benutzen Sie das Verfahren des Beispiels auf Seite 35 der Vorlesungsnotizien.

Lösung: Wir beachten zuerst, dass sowohl $\det A$ als auch $\det B$ kleiner als 0 sind, und somit sind die beide nicht positiv-definit (wir können das Gram-Schmidt Verfahren nicht anwenden).

a) Wir suchen einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^2$, der die Funktion

$$w \mapsto (w, Aw)$$

minimisiert. Dann ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = (v, Av)$. Die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^2$ sind von der Form

$$v := \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}.$$

Wir suchen also eine Minimalstelle der Funktion

$$f_A(x) := \left(\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \right)$$

Eine kurze Rechnung liefert

$$f_A(x) = 3x^2 + 4x\sqrt{1-x^2} - 2.$$

Es muss $\frac{\partial f_A}{\partial x}(x) = 0$ gelten. Die Ableitung von f_A lautet

$$\frac{\partial f_A}{\partial x} = \frac{6x\sqrt{1-x^2} - 4(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Falls $\frac{\partial f_A(x)}{\partial x}(x) = 0$, dann ist

$$\begin{aligned} &3x\sqrt{1-x^2} = 2(2x^2-1) \\ \Rightarrow\ &9x^2(1-x^2) = 4(2x^2-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ &25x^4 - 25x^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 16 \cdot 25}}{50} = \frac{5 \pm 3}{10}$$

Also gilt $x^2 = \frac{1}{5}$ oder $x^2 = \frac{4}{5}$, d.h.

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

oder

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Achtung: Nicht alle Lösungen müssen einen Eigenvektor von A liefern.

Es gilt

$$A \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

und somit ist $v = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor von A zum Eigenwert 2.

Nun wissen wir, dass $v^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist, der einen Eigenvektor von A enthält. Da $v^\perp$ 1-dimensional ist, ist jeder Vektor in $v^\perp$ ein Eigenvektor. Also können wir zB $w := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ betrachten. Wir rechnen direkt

$$A \cdot w = -3w,$$

und somit ist w Eigenvektor zum Eigenwert -3.
Die gesuchte orthonormale Basis von $\mathbb{R}^2$ ist $\{v, w\}$ und bezüglich dieser Basis hat A die Diagonalform

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir gehen wie in Teilaufgabe a) vor. Setze

$$f_B(x) =:= \left(\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}, B \cdot \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix} \right) = -6x^2 + 6x\sqrt{1-x62} + 2.$$

Die Ableitung lautet

$$\frac{\partial f_B}{\partial x}(x) = \frac{-12x\sqrt{1-x^2} + 6(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

und somit muss die gesuchte x die Gleichung

$$12x\sqrt{1-x^2} = 6(1-2x^2)$$

lösen. Daraus folgt

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \overset{!}{\geq} 0,$$

also $x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Somit

$$x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Achtung: Nicht beide Lösungen müssen einen Eigenvektor von A liefern.
Es gilt $\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ und somit ist

$$v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Wir machen eine kurze Rechung um diese Vektoren zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2+\sqrt{2}} &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot (1+\sqrt{2}),
\end{aligned}$$

also ist $v = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ oder $v = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
B\cdot\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}7+4\sqrt{2}\\-1-3\sqrt{2}\end{pmatrix}\\
&= (-1-3\sqrt{2})\begin{pmatrix}-\frac{7+4\sqrt{2}}{1+3\sqrt{2}}\\1\end{pmatrix}\\
&= (-1-3\sqrt{2})\begin{pmatrix}-\frac{(7+4\sqrt{2})(1-3\sqrt{2})}{1^2-(3\sqrt{2})^2}\\1\end{pmatrix}\\
&= (-1-3\sqrt{2})\begin{pmatrix}\frac{-17-17\sqrt{2}}{17}\\1\end{pmatrix}\\
&= (-1-3\sqrt{2})\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und somit ist $v = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor von B zum Eigenwert $-1-3\sqrt{2}$.
Wir suchen den zweiten Eigenvektor in $v^\perp$. Dieser Raum ist 1-dimensional, also jeder Vektor in $v^\perp$ ist ein Eigenvektor. Wir wählen $w = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$.
Wir rechnen direkt, um den ensprechenden Eigenwert zu finden

$$B\cdot\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+3\sqrt{2}\\5+2\sqrt{2}\end{pmatrix} = (-1+3\sqrt{2})\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Bezüglich der orthonormalen Basis $\{v, w\}$ hat B die Diagonalform

$$\begin{pmatrix}-1-3\sqrt{2} & 0\\0 & -1+3\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$