Lösung Serie 7

1. Gegeben sei der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie die Ebene, welche aufgespannt wird durch

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie die Spannungsvektoren ihrer beiden normalen Einheitsvektoren.

Lösung: Wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ aufgespannt durch zwei Vektoren v und w, dann sind ihre beiden normalen Einheitsvektoren gegeben durch $n := \frac{v\times w}{\|v\times w\|}$ und $-n$. Wegen der Linearität des Spannungstensors, die assoziierten Spannungsvektoren unterscheiden sich um ein Vorzeichen, i.e. $\sigma(-n) = -\sigma(n)$. In unserem Fall setzten wir

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und bekommen $n = \frac{v\times w}{\|v\times w\|} = \frac{1}{\sqrt{56}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\sigma(n) \overset{(\star)}{=} (\sigma^{ij})^{\mathsf{T}} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \sigma \cdot n = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma(-n) = -\sigma(n) = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$(\star)$ Seite 43 der Vorlesungsnotizen.

2. Sei $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Basis, bezüglich welcher der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

die Form

$$\widetilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Lösung: Wegen der Linearität der Matrixmultiplikation hängt die Lösung nicht von s ab, also können wir annehmen, dass $s = 1$, d.h.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne φ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung σ bezüglich der Standarbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Gesucht ist nun eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit

$$\varphi(v_1) = 0, \varphi(v_2) = v_3, \varphi(v_3) = v_2.$$

Wir sehen, dass φ die erzeugten Untervektorräume $\langle e_1 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle e_2, e_3 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle$ jeweils auf sich selbst abbildet. Daher können wir $\mathcal{B}$ finden mit $v_1 \in \langle e_1 \rangle$ und $v_2, v_3 \in \langle e_2, e_3 \rangle$. Das bedeutet,

$$v_1 = \alpha e_1 \quad \text{und} \quad v = 2 = ae_2 + be_3, v_3 = ce_2 + de_3,$$

für $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun diese Koeffizienten bestimmen. Es muss

$$0 = \varphi(v_1) = \alpha\varphi(e_1) = \alpha \cdot 0$$

gelten, was aber für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, also können wir α beliebig wählen und wir setzten $v_1 := e_1$ (d.h. $\alpha = 1$). Ausserdem muss es

$$ce_2 + de_3 = v_3 \overset{!}{=} \varphi(v_2) = a\varphi(e_2) + b\varphi(e_3) = -ae_2 + be_3$$
$$ae_2 + be_3 = v_2 \overset{!}{=} \varphi(v_3) = c\varphi(e_2) + d\varphi(e_3) = -ce_2 + de_3$$

gelten. Das gibt die Bedinungen $a = -c$ und $b = d$ und wir setzen $v_2 := e_2 + e_3$, $v_3 = -e_2 + e_3$ (wir haben $a = 1, b = 1$ gewählt). *Beachte, dass wir eine Basis suchen, und die Wahl $a = 0$ oder $b = 0$ oder $\alpha = 0$ führt nicht zu einer Basis.* Die Basis $\mathcal{B} = \{e_1, e_2 + e_3, -e_2 + e_3\}$ hat die gewünschte Eigenschaften und die Basistransformationsmatrix ist

$$L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Transformieren Sie den Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mit der Basistransformationsmatrix

$$L := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Ist L orthonormal?

Lösung: Wir checken, dass L orthonormal ist, so dass $L^{-1} = L^{\mathsf{T}}$ und der transformierte Tensor wird $L^{\mathsf{T}}\sigma L$ (insbesondere müssen wir die Inverse von L nicht berechenen). Es genügt zu zeigen, dass die Spaltenvektoren von L orthonormal bezüglich des Standardskalarpdukts sind, d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, 3$. ($v_i = i$-te Spalte von L).

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_1 \rangle &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1, \\
\langle v_1, v_2 \rangle &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\frac{3}{4} = 0 \\
\langle v_1, v_3 \rangle &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\
\langle v_2, v_2 \rangle &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = 1 \\
\langle v_2, v_3 \rangle &= \ldots = 0 \\
\langle v_3, v_3 \rangle &= \ldots = 1.
\end{aligned}$$

Der transformierte Tensor ist also

$$L^{-1}\sigma L = L^{\mathsf{T}}\sigma L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich sind die Spaltenvektoren von L sogar Eigenvektoren von σ zu den Eigenwerten die auf der Diagonale des transformierten Tensors stehen.

4. Der Spannungstensor

$$\sigma := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Finden Sie eine orthonormale Basis, bezüglich welcher σ Diagonalform hat.

Lösung: Wir finden die Eigenvektoren von σ. Da σ drei verschiedene Eigenwerte hat, sind die Eigenvektoren paarweise orthogonal zueinander und wenn sie normiert sind, dann erzeugen sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich dieser Basis hat σ Diagonalform und die Diagonale besteht aus den Eigenwerten von σ.

Wir suchen nun den normierten Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 2$, welcher folgende Gleichung lösen müss

$$\sigma v = 2v \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}v_1 - v_2 - v_3 = 4\sqrt{2}v_1 \\ -\sqrt{2}v_1 + 3v_2 - 5v_3 = 8v_2 \\ -\sqrt{2}v_1 - 5v_2 + 3v_3 = 8v_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{2}v_1 = -(v_2 + v_3) \\ -\sqrt{2}v_1 = 5(v_2 + v_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3. \end{cases}$$

Also ist $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ -v_2 \end{pmatrix}$. Die Bedinung $\|v\| = 1$ gibt

$$1 \stackrel{!}{=} 2v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = 1$$

und wir wählen $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Analog finden wir die andere zwei normierte Eigenvektoren $w = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Die gesuchte Basis ist $\{v, w, u\}$ und bezüglich dieser basis hat σ die Form $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Betrachten Sie den Trägheitstensor

$$I := \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment von I bezüglich der Achse durch den Nullpunkt mit Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Symmetrieachsen des zu I gehörenden Trägheitsellipsoids. *Hinweis*: Die Eigenwerte von I sind $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 5$.

Lösung:

a) Wir normieren den Richtungsvektor der Achse: $p := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Das Trägheitsmoment von I bezüglich der Achse $p = (p_1, p_2, p_3)^\mathsf{T}$ ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{3} I^{ij} p_i p_j = p^\mathsf{T} \cdot I \cdot p = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{23}{3}.$$

(Siehe beispielsweise Abschnitt 6.1.2 des Skripts.)

b) Das zu I gehörenden Ellipsoids ist durch die folgende Gleichung beschreibt

$$1 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathsf{T} I \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9x^2 + 10y^2 + 9z^2 - 8xz.$$

Wir zeigen zuerst, dass die Symmetrieachsen durch die Vektoren einer Eigenbasis von I, welche zugleich eine Orthonormalbasis ist, gegeben sind. Dann finden wir eine solche Eigenbasis.

Behauptung. Sei $A \in Mat_{3,3}(\mathbb{R})$ symmetrisch mit orthogonale Eigenvektoren v_1, v_2, v_3. Dann sind die Symmetrieachsen des Ellipsoids

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

beschrieben durch die Eigenvektoren v_1, v_2, v_3.

Beweis. Die Matrix A ist symmetrisch und besitzt eine orthonormale Basis von Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Sei

P die Matrix mit Spalten v_1, v_2, v_3, d.h.

$$P \coloneqq \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

so dass

$$P^\mathsf{T} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass $P^\mathsf{T} = P^{-1}$, da die Eigenvektoren eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.
Sei nun $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt auf dem Ellipsoid, dann

$$\begin{aligned}
1 = v^\mathsf{T} A v = v^\mathsf{T} (P^\mathsf{T})^{-1} &\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} v \\
&= v^\mathsf{T} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^\mathsf{T} v \\
&= (P^\mathsf{T} v)^\mathsf{T} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} (P^\mathsf{T} v) \\
&= \begin{pmatrix} v_1^\mathsf{T} v & v_2^\mathsf{T} v & v_3^\mathsf{T} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^\mathsf{T} v \\ v_2^\mathsf{T} v \\ v_3^\mathsf{T} v \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 (v_1^\mathsf{T} v)^2 + \lambda_2 (v_2^\mathsf{T} v)^2 + \lambda_3 (v_3^\mathsf{T} v)^2 \\
&= \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_1 w_3^2,
\end{aligned}$$

wobei $w_i \coloneqq v_i^\mathsf{T} v$.
Die i-te Symmetrieachse des Ellipsoids $\lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 + \lambda_1 w_3^2 = 1$ besteht aus den Punkten $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $w_j = 0$ für alle $j \neq i$ (z.B. 1-te Achse ist (w_1, w_1, w_3) mit $w_2 = w_3 = 0$).
Wir schliessen nun, dass

$$\begin{aligned}
\text{Der Punkt } v \text{ liegt auf der } i\text{-te Symmetrieachse von } E \\
&\Leftrightarrow w_j = v_j^\mathsf{T} v = 0 \text{ für alle } j \neq i \\
&\Leftrightarrow v \text{ ist orthogonal zu } v_j \text{ für alle } j \neq i \\
&\Leftrightarrow v \in \operatorname{span}(v_i)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass die Eigenvektoren eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir haben gezeigt, dass i-te Symmetrieachse von $E = \operatorname{span}(v_i)$. $\square$

Zurück zur Aufgabe. Wir beachten, dass die Eigenwerte von I verschieden sind und insbesondere die zugehörige Eigenvektoren orthogonal zueinander sind. Gemäss der Behauptung, um die Symmetrieachsen zu bestimmen, genügt die Eigenvektoren von I zu berechnen. Eine ähnliche Rechnung wie in Aufgabe 4 liefert die drei normierten Eigenvektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Die Symmetrieachsen des Ellipsoids sind

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$