Serie 1

Abgabetermin: Donnerstag 5. März 2020 im **HG J 68**.

1. Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Betrachten Sie den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V aller Polynome in X mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ vom Grad ≤ 5.

   a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren

   $$\begin{aligned} p_1 &:= 1 + X^2 + X^4, \\ p_2 &:= 1 + X + X^3, \\ p_3 &:= 1 + X + X^4 + X^5 \end{aligned}$$

   in V linear unabhängig sind.

   b) Erweitern Sie $\{p_1, p_2, p_3\}$ zu einer Basis von V.

2. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

   $$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$$

   und

   $$\widetilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

   a) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $(-24, 8, 19)^T$ bezüglich der Standardbasis. Berechnen Sie den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$, beziehungsweise $[v]_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ von v bezüglich $\mathcal{B}$, beziehungsweise $\widetilde{\mathcal{B}}$.

   b) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)^T$. Bestimmen Sie die Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

3. Betrachten Sie die Differentialgleichung

   $$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0.$$

   Sei V der Raum all ihrer reellwertigen Lösungen.

   a) Zeigen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist.

   b) Finden Sie eine Basis von V.

   c) Finden Sie vier Vektoren in V, so dass je zwei dieser Vektoren linear unabhängig sind.

4. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

und

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Sei ψ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit Matrixdarstellung

$$\psi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\psi_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ von ψ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

5. Seien x und y (Spalten-)Vektoren und A und B Matrizen.

   a) Schreiben Sie die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention.

      i) $x^T y$
      ii) $x^T A y$
      iii) $(B^T x)^T A$

   b) Sei $A_{ij} = i - j$. Zeigen Sie, dass $A_{ij} x^i x^j = 0$.