Serie 2

Abgabetermin: Donnerstag 19. März 2020 im **HG J 68**.

1. Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektionen auf die Ebene

$$E_1 : x + 3y = 2z \quad \text{bzw.} \quad E_2 : x = y$$

   a) Geben Sie die Matrix von $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an.

   b) Finden Sie für jede der Abbildungen eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass die jeweilige Matrixdarstellung der Abbildung bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat. Für $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ finden Sie je eine Basis, die zusätzlich orthogonal ist.

2. Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Multiplikation mit einem Element $z = s + it \in \mathbb{C}$ definiert eine lineare Abbildung $\psi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Geben Sie die Matrixdarstellung von ψ_z bezüglich der Standardbasis $\{1, i\}$ und bezüglich $\{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$ an.

3. Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Diese bilden gemeinsam eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$. Sei $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Basisvektoren $\beta^1, \beta^2, \beta^3$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}^* = \{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

   Zur Erinnerung: Diese ist charakterisiert durch die Eigenschaft, dass $\epsilon^i(e_j) = \delta^i_j$ für alle $i, j = 1, \ldots, 3$, wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

4. Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit Matrix

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   bezüglich der Standardbasis und bezeichne ϕ^* die zu ϕ duale Abbildung. Sei $v := e_1 + 2e_2 + 3e_3 \in \mathbb{R}^3$ und $f := \epsilon^1 - 2\epsilon^2 + 3\epsilon^3 \in (\mathbb{R}^3)^*$.

   Zur Erinnerung: Die duale Abbildung ϕ^* zu ϕ ist die Abbildung $\phi^* : V^* \to V^*$, so dass für $f \in V^*, v \in V$ gilt

$$\phi^*(f)(v) = f(\phi(v)).$$

   a) Schreiben Sie $\phi^*(f)$ in der Basis $\{\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3\}$.

   b) Berechnen Sie $\phi^*(f)(v)$.