Serie 3

Abgabetermin: Donnerstag 2. April 2020 per email an stoccod(at)student.ethz.ch

1. a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ definiert.

b) Sei $\mathcal{B}^*$ ihre duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Berechnen Sie die Koordinaten der Vektoren von $\mathcal{B}^*$ bezüglich der Standardbasis von $(\mathbb{R}^3)^*$.

2. Betrachten Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Finden Sie den $(0,1)$-Tensor T mit den Eigenschaften

$$T(v_1) = 2,\ T(v_2) = 1,\ T(v_3) = -2.$$

b) Bestimmen Sie $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

c) Finden Sie eine Basis von $W := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0\}$.

3. Sei T_v der zu

$$v := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

assozierte $(1,0)$-Tensor. Weiter seien

$$f := \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ g := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^*)^3.$$

Berechnen Sie $T_v(4f - g)$ und $T_v(2f + g)$.

4. Sei T der $(0,3)$-Tensor von $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$T(e_i, e_j, e_k) := \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } j = k \\ i \cdot j \cdot k, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $1 \leq i, j, k \leq 3$. Berechnen Sie $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

5. Betrachten Sie zu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ den $(1,1)$-Tensor T von $\mathbb{R}^3$ mit Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & a & b \end{bmatrix}$$

bezüglich den Standardbases, d.h. $A^i_j = T(\varepsilon^i, e_j)$. Seien $f, g \in (\mathbb{R}^3)^*$ mit Koordinaten

$$[f]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } [g]_{\mathcal{E}^*} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $v := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie alle Tupel (a, b) so, dass für den zu ihnen betrachteten Tensor T gilt

$$T(f, v) = 9 \quad \text{und} \quad T(g, v) = 19.$$