Serie 4

Abgabetermin: Donnerstag 23. April 2020 per email an stoccod(at)student.ethz.ch

1. Sei $V := \mathbb{R}^3$. Sei $v := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T \in V$ mit zugehörigem $(1,0)$-Tensor T_v und sei $f := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in V^*$ mit zugehörigem $(0,1)$-Tensor T_f. Berechnen Sie
$$T_v \otimes T_f \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

2. Sei $V := \mathbb{R}^2$. Der $(3,0)$-Tensor T sei bezüglich der Standardbasis $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ von V^* definiert durch
$$T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k) := \begin{cases} i+i, & \text{falls } k = 1 \\ i-j, & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$
   a) Berechnen Sie $T(\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix})$.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der zur Basis
$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
   dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

3. Sei $V := \mathbb{R}^3$. Der $(0,2)$-Tensor sei bezüglich der Standardbasis von V definiert durch
$$T := \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 3 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
   a) Bestimmen Sie die Koordinaten von T bezüglich der Basis
$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   b) Berechnen Sie $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.
   Hinweis: Rechnen Sie mit den Koordinaten aus a).

4. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasis $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ und $\Delta : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ eine Determinantenfunktion mit $\Delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) = 5$.

   a) Sei $\Delta_{ijk} \coloneqq \Delta(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k)$. Bestimmen Sie Δ_{ijk} für alle $1 \leq i, j, k \leq 3$.

   b) Zeigen Sie, dass für drei vektoren $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^T$, $v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}^T$, $w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Delta(u, v, w) = -5 \det \left(\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right),$$

   wobei $\det(A)$ die Determinante der 3×3-matrix A bezeichnet.