# Serie 5

1. Sei $V := \mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

welche bezüglich dem Standard-Skalarprodukt orthogonal ist.

   a) Bestimmen Sie die zu $\mathcal{B}$ gehörige orthonormierte Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$.

   b) Sei $v := \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $v$ bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$.

2. Das Skalarprodukt $T$ sei bezglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 35 & -5 & -27 \\ -5 & 11 & 9 \\ -27 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

   a) Konstruieren Sie mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren eine bezüglich $T$ orthogonale Basis $\mathcal{B}$.

   b) Bestimmen Sie die Matrix von $T$ bezüglich $\mathcal{B}$.

3. Sei $V := \mathbb{R}^3$.

   a) Ergänzen Sie $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ mit Hilfe des Vektorprodukts zu einer bezüglich dem Standard-Skalarprodukt orthogonalen Basis $\mathcal{B}$.

   b) Sei $L$ die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zu $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie $L^{\mathsf{T}}L$.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms, dass die Eigenwerte einer reellen symmetrischen $2 \times 2$-Matrix reell sind.

5. Sei $V := \mathbb{R}^2$. Gegeben sei die symmetrische Bilinearform $T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

   b) Ist $T$ negativ definit?

   c) Finden Sie zwei bezüglich $T$ zueinander orthogonale Eigenvektoren.