Serie 7

1. Gegeben sei der Spannungstensor
$$\sigma := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
Betrachten Sie die Ebene, welche aufgespannt wird durch
$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
und bestimmen Sie die Spannungsvektoren ihrer beiden normalen Einheitsvektoren.

2. Sei $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Basis, bezüglich welcher der Spannungstensor
$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$
die Form
$$\widetilde{\sigma} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}$$
hat.

3. Transformieren Sie den Spannungstensor
$$\sigma := \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
mit der Basistransformationsmatrix
$$L := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Ist L orthonormal?

4. Der Spannungstensor
$$\sigma := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$
hat Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$. Finden Sie eine orthonormale Basis, bezüglich welcher σ Diagonalform hat.

5. Betrachten Sie den Trägheitstensor

$$I := \begin{pmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment von I bezüglich der Achse durch den Nullpunkt mit Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Symmetrieachsen des zu I gehörenden Trägheitsellipsoids. *Hinweis*: Die Eigenwerte von I sind $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 5$.