6.2 Quadratische Funktionen

Sei $T(v,w)$ eine symmetrische Bilinearfunktion, d.h. T ist ein $(0,2)$-Tensor für den gilt:

$$T(v,w) = T(w,v) \quad \text{für alle } v,w \in V.$$

- Setzen wir $v=w$, so erhalten wir eine Funktion

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & V \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \longmapsto \Phi(v) := T(v,v) \quad (\text{für } v \in V). \end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi : V \to \mathbb{R}$ heisst die zu T gehörige <u>quadratische Funktion</u>.

<u>Bem.</u> Φ ist <u>kein</u> $(0,1)$-Tensor, denn Φ ist <u>nicht linear</u>:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda v) &= T(\lambda v, \lambda v) = \lambda \cdot T(v, \lambda v) = \lambda^2 \cdot T(v,v) \\ &= \lambda^2 \Phi(v) \end{aligned}$$

wobei für $v \neq 0$ und $\lambda \neq \pm 1$ im Allgemeinen gilt:

$$\Phi(\lambda v) \neq \lambda \cdot \Phi(v).$$

<u>Bsp.</u> $\Phi_1 : V \to \mathbb{R}$, $v \longmapsto |v|^2$ und $\Phi_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $v \longmapsto (v,v)$ (irgend ein Skalarprodukt)

sind quadratische Funktionen.

- Aus der quadratischen Funktion Φ können wir umgekehrt den zugehörigen sym. $(0,2)$-Tensor zurückgewinnen:

$$T(v,w) = \frac{1}{2} \cdot \Big(\underbrace{\Phi(v+w)}_{} - \overbrace{\Phi(v)}^{T(v,v)} - \overbrace{\Phi(w)}^{T(w,w)} \Big)$$

$$= T(v+w, v+w) = \underbrace{T(v,w) + T(w,v)}_{2 \cdot T(v,w)} + T(v,v) + T(w,w)$$

Daraus folgt, dass zu verschiedenen sym. Bilinearfunktionen immer auch verschiedene quadratische Funktionen gehören.

Es stellt sich nun die Frage, wann eine gegebene Funktion $\Phi : V \to \mathbb{R}$ quadratisch ist, d.h. von folgender Form ist:

$$\Phi(v) = T(v,v) \quad \text{für eine sym. Bilinearfunktion } T.$$

Notwendig dafür ist sicher, dass gilt:

$$\underbrace{\Phi(v+w)}_{T(v,v)+T(w,w)+2\cdot T(v,w)} + \underbrace{\Phi(v-w)}_{T(v,v)+(-1)^2\cdot T(w,w)-2\cdot T(v,w)} = 2\cdot\Phi(v) + 2\cdot\Phi(w) \qquad (*)$$

falls T die zu Φ gehörige sym. Bilinearfunktion ist.

Wir zeigen nun, dass jede stetige Funktion $\Phi : V \to \mathbb{R}$ welche die Gleichung $(*)$ erfüllt, eine quadratische Funktion ist. Wir erhalten aus $(*)$ folgende Gleichungen:

- $\Phi(0) = 0$ (setze $v = w = 0$)
- $\Phi(-w) = \Phi(w)$ (setze $v = 0$)

Wir versuchen nun eine sym. Bilinearfunktion $T(v,w)$ zu bestimmen, die für $v = w$ in die gegebene quadratische Funktion $\Phi(v)$ über geht.

Wir definieren: $\quad T(v,w) := \frac{1}{2}\cdot\left(\Phi(v+w) - \Phi(v) - \Phi(w)\right)$

Wir müssen nun zeigen, dass die so definierte Funktion $T(v,w)$ eine sym. Bilinearfunktion ist.

- $T(v,w) = T(w,v)$ folgt direkt aus der Definition, d.h. T ist symmetrisch.

- $T(v,w)$ ist bezüglich v linear:

(1) $2\cdot T(v_1+v_2, w) = \Phi(v_1+v_2+w) - \Phi(v_1+v_2) - \Phi(w)$ (Gl. (*))

$- \; 2\cdot T(v_1, w) = \Phi(v_1+w) - \Phi(v_1) - \Phi(w)$ (Gl. (*))

$- \; 2\cdot T(v_2, w) = \Phi(v_2+w) - \Phi(v_2) - \Phi(w)$ (Gl. (*))

$$2\big(T(v_1+v_2, w) - T(v_1, w) - T(v_2, w)\big)$$
$$= \Phi(v_1+v_2+w) - \Phi(v_1+v_2) + \Phi(w) + \ldots \quad [\text{längere Rechnung}]$$

schliesslich erhalten wir $T(v_1+v_2, w) = T(v_1, w) + T(v_2, w)$.

(2) Es bleibt zu zeigen, dass gilt: $T(\lambda\cdot v, w) = \lambda\cdot T(v,w)$

Es genügt dies für $\lambda > 0$ zu zeigen.

- Ist $k \in \mathbb{N}$, so gilt: $T(\underbrace{k\cdot v}_{\underbrace{v+\ldots+v}_{k\text{-mal}}}, w) = k\cdot T(v,w)$

- Ist $k = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, so gilt: $q\cdot T(\frac{p}{q}\cdot v, w) = T(p\cdot v, w)$
$= p\cdot T(v,w)$.

D.h. $T(\frac{p}{q}\cdot v, w) = \frac{p}{q}\cdot T(v,w)$.

- Aus der Stetigkeit von $\Phi: V \to \mathbb{R}$ folgt nun, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:
$$T(\lambda\cdot v, w) = \lambda\cdot T(v,w)$$

Somit ist $T(v,w)$ linear bezüglich v.

- Weil T symmetrisch ist, ist T auch linear bezüglich w.

Damit ist T eine sym. Bilinearfunktion, was zu zeigen war.

Sei Φ eine quadratische Funktion und sei T die zugehörige sym. Bilinearfunktion. Die Menge aller Vektoren $u_0 \in V$, so dass für alle $w \in V$ gilt

$$T(u_0, w) = 0$$

bildet den <u>Ausartungsraum</u> von Φ. Der Ausartungsraum von Φ bildet einen Unterraum von V.

Besteht der Ausartungsraum von Φ nur aus dem Nullvektor, so heisst Φ <u>nicht-ausgeartet</u>.

Der folgende Satz (den wir nicht beweisen) gilt auch für ausgeartete quadratische Funktionen.

<u>Satz</u> Sind Φ & Ψ quadratische Funktionen in $V = \mathbb{R}^n$ (für $n \geq 3$) welche für keinen Vektor $v \neq 0$ gleichzeitig den Wert 0 annehmen, so lassen sich Φ & Ψ simultan diagonalisieren.