4.2 Basistransformation

Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ & $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ ein Paar dualer Basen in V bzw. V^* und sei $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ eine weitere Basis in V. Wir bestimmen zuerst die zu $\{\tilde{b}_i\}$ duale Basis $\{\tilde{\beta}^i\}$:

$$\tilde{b}_i = L_i^1 b_1 + \dots + L_i^n b_n = L_i^j b_j \quad (L = L_i^j \text{ ist die Transformationsmatrix } L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}})$$

Weil $\{b_i\}$ & $\{\beta^i\}$ duale Basen sind, gilt $\beta^i(b_j) = \delta^i_j$.

Es muss nun für $\{\tilde{b}_i\}$ & $\{\tilde{\beta}^i\}$ ebenfalls gelten

$$\tilde{\beta}^\ell(\tilde{b}_i) = \delta^\ell_i \text{, d.h. } \tilde{\beta}^\ell(L_i^j b_j) = \delta^\ell_i.$$

Nun ist $\tilde{\beta}^\ell$ eine Linearkombination der β^k, also

$$\tilde{\beta}^\ell = \Lambda^\ell_1 \beta^1 + \Lambda^\ell_2 \beta^2 + \dots + \Lambda^\ell_n \beta^n = \Lambda^\ell_k \beta^k.$$

Wir erhalten somit

$$\underbrace{\tilde{\beta}^\ell(\tilde{b}_i)}_{\substack{= \delta^\ell_i \\ \text{nach Def.}}} = \Lambda^\ell_k \underbrace{\beta^k b_j}_{\substack{= \delta^k_j \\ \text{nach Def.}}} L_i^j = \underbrace{\Lambda^\ell_m L_i^m}_{= \delta^\ell_i}$$

und aus $\Lambda^\ell_m L_i^m = \delta^\ell_i$ folgt $\Lambda \cdot L = \mathbb{1}$ (Identität)

d.h. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Transformationsmatrix} \\ \mathcal{B}^* \to \tilde{\mathcal{B}}^*}}{\Lambda} = L^{-1}$ (Basiswechsel ist kontravariant)

Basiswechsel (mit Matrizen):

kovariant $\mathcal{B} \xrightarrow{L} \tilde{\mathcal{B}}$; $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \Lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ kontravariant

kontravariant $\mathcal{B}^* \xrightarrow{} \tilde{\mathcal{B}}^*$; $[v^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = [v^*]_{\mathcal{B}^*} \cdot \Lambda^{-1} = [v]_{\mathcal{B}^*} \cdot L$ kovariant

$\Lambda = L^{-1}$

Allgemeine Transformation eines (p,q)-Tensors:

Sei T ein (p,q)-Tensor; wir schreiben

$$T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = T(\beta^{i_1}, \dots, \beta^{i_p}, b_{j_1}, \dots, b_{j_q}) \qquad (1 \leq i_k, j_k \leq n)$$

wobei $\{b_1, \dots, b_n\}$ & $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ ein Paar dualer Basen in V bzw. V^* ist. Sei nun $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ & $\{\tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^n\}$ ein anderes Paar dualer Basen und seien L & Λ die entsprechenden Transformationsmatrizen der Basen, so gilt:

$$\tilde{\beta}^i = \beta^k \Lambda^i_k \quad \& \quad \tilde{b}_j = L^l_j b_l$$

Für den Tensor T in der neuen Basis gilt somit:

Definition

$$\tilde{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = \tilde{T}(\tilde{\beta}^{i_1}, \dots, \tilde{\beta}^{i_p}, \tilde{b}_{j_1}, \dots, \tilde{b}_{j_q})$$

$\tilde{T}$ ist derselbe Tensor wie T

$$= T(\underbrace{\beta^{k_1} \cdot \Lambda^{i_1}_{k_1}}_{= \tilde{\beta}^{i_1}}, \dots, \underbrace{\beta^{k_p} \Lambda^{i_p}_{k_p}}_{= \tilde{\beta}^{i_p}}, \underbrace{L^{l_1}_{j_1} b_{l_1}}_{= \tilde{b}_{j_1}}, \dots, \underbrace{L^{l_q}_{j_q} b_{l_q}}_{= \tilde{b}_{j_q}})$$

$$= \underbrace{\Lambda^{i_1}_{k_1} \cdots \Lambda^{i_p}_{k_p}}_{p\text{-fach kontravariant}} \cdot \underbrace{L^{l_1}_{j_1} \cdots L^{l_q}_{j_q}}_{q\text{-fach kovariant}} \cdot T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$$

Ein Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$, T ein $(1,2)$-Tensor.

T bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ sei gegeben durch

$$T^{i}_{j_1 j_2} := \begin{cases} j_1 \cdot j_2 & \text{für } i=1 \\ -j_1 \cdot j_2 & \text{für } i=2 \end{cases} \quad (\text{wobei } 1 \leq i, j_1, j_2 \leq 2)$$

Zum Beispiel ist $T(\varepsilon_2, e_2, e_1) = T^{2}_{2,1} = -2 \cdot 1 = -2$.

Sei nun $w^* = (2\ 3)$; $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

D.h. $w^* = 2 \cdot \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$; $v_1 = 0 \cdot e_1 + 2e_2$; $v_2 = -1 \cdot e_1 + 3e_2$.

Zur Erinnerung: $T^{i}_{j_1 j_2} = T(\varepsilon_i, e_{j_1}, e_{j_2}) = \pm j_1 \cdot j_2$ ($+$: $i=1$, $-$: $i=2$)

$$\begin{aligned} T(w^*, v_1, v_2) = &\ \underbrace{T^{1}_{11}}_{=1} \cdot (2 \cdot 0 \cdot (-1)) = 0 \\ &+ \underbrace{T^{1}_{21}}_{=2} \cdot (2 \cdot 2 \cdot (-1)) = -8 \\ &+ \underbrace{T^{1}_{12}}_{=2} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 3) = 0 \\ &+ \underbrace{T^{1}_{22}}_{=4} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 48 \\ &+ T^{2}_{11} \cdot (3 \cdot 0 \cdot (-1)) = 0 \\ &+ \underbrace{T^{2}_{21}}_{=-2} \cdot (3 \cdot 2 \cdot (-1)) = 12 \\ &+ T^{2}_{12} \cdot (3 \cdot 0 \cdot 3) = 0 \\ &+ \underbrace{T^{2}_{22}}_{=-4} \cdot (3 \cdot 2 \cdot 3) = -72 \\ & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -20} \end{aligned}$$

Also ist $T(w^*, v_1, v_2) = -20$.

Wir transformieren nun T in eine neue Basis.

Die neue Basis sei $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}}_{=\tilde{b}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}}_{=\tilde{b}_2} \right\}$

Die Basistransformationsmatrix $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ ist

$$L = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ L^{\ell}_1 & L^{\ell}_2 \end{array} & \end{array} \quad \text{und} \quad \Lambda = L^{-1} = \frac{1}{2}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \Lambda^1_k \\ \leftarrow \Lambda^2_k \end{array}$$

Es gilt:

$$\tilde{T}^i_{j_1 j_2} = T\left(\beta^k \Lambda^i_k,\ L^{\ell_1}_{j_1} b_{\ell_1},\ L^{\ell_2}_{j_2} b_{\ell_2}\right)$$

Zum Beispiel ist $\tilde{T}^1_{11} = T\left(\frac{1}{2}(-\beta^1-\beta^2), -b_1-b_2, -b_1-b_2\right)$

Aus der Multilinearität von T und weil $T^1_{j_1 j_2} = -T^2_{j_1 j_2}$

ist $\tilde{T}^1_{j_1 j_2} = 0$ für alle $1 \leq j_1, j_2 \leq 2$.

Nun berechnen wir $\tilde{T}^2_{j_1 j_2}$ für $1 \leq j_1, j_2 \leq 2$:

$$\tilde{T}^2_{11} = T\left(\frac{1}{2}(\beta^1-\beta^2), -b_1-b_2, -b_1-b_2\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen Multilinearität}}}{=} \frac{1}{2}\cdot(-1\cdot-1) + \frac{1}{2}(-1\cdot-2) + \frac{1}{2}(-2\cdot-1) + \frac{1}{2}\cdot(-2\cdot-2) + $$
$$- \frac{1}{2}\cdot\left(-(-1\cdot-1)\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-(-1\cdot-2)\right) - \ldots = 9$$

Weiter gilt:

$$\tilde{T}^2_{12} = \tilde{T}^2_{21} = T\left(\frac{1}{2}(\beta^1-\beta^2), b_1-b_2, -b_1-b_2\right) = -1-2+2+4$$
$$= 3$$

$$\tilde{T}^2_{22} = T\left(\frac{1}{2}(\beta^1-\beta^2), b_1-b_2, b_1-b_2\right) = 1-2-2+4 = 1$$

Also: $\tilde{T}^1_{j_1 j_2} = 0$; $\tilde{T}^2_{12} = \tilde{T}^2_{21} = 3$; $\tilde{T}^2_{11} = 9$; $\tilde{T}^2_{22} = 1$.

Wir schreiben nun w^*, v_1, v_2 in den neuen Basen:

$$[w^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = (2\ 3)\cdot L = (2\ 3)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} = (-5\ -1)$$

$$[v_1]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \Lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$[v_2]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \Lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir $\tilde{T}(w^*, v_1, v_2)$:

Da $\tilde{T}$ derselbe Tensor ist wie T, sollten wir wieder $\tilde{T}(w^*, v_1, v_2) = -20$ erhalten.

$$\tilde{T}\left((-5,-1), \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

[Erinnerung: $\tilde{T}^1_{j_1 j_2} = 0$]

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\tilde{T}^2_{11}}_{=9}\cdot(-1\cdot -1\cdot -1) && -9\\
&+ \underbrace{\tilde{T}^2_{12}}_{=3}\cdot(-1\cdot -1\cdot -2) && -6\\
&+ \underbrace{\tilde{T}^2_{21}}_{=3}\cdot(-1\cdot -1\cdot -1) && -3\\
&+ \underbrace{\tilde{T}^2_{22}}_{=1}\cdot(-1\cdot -1\cdot -2) && -2\\
& && \overline{-20}
\end{aligned}$$

Also ist $\tilde{T}([w^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*}, [v_1]_{\tilde{\mathcal{B}}}, [v_2]_{\tilde{\mathcal{B}}}) = T([w^*]_{\mathcal{B}^*}, [v_1]_{\mathcal{B}}, [v_2]_{\mathcal{B}}) = -20.$