1 DER DUALRAUM

Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so ist der Raum aller linearen Abbildungen $f: V \to K$ ebenfalls ein Vektorraum über K.

$f: V \to K$ linear heisst: $f(r \cdot v \overset{\text{in } V}{+} s \cdot w) = r \cdot f(v) \overset{\text{in } K}{+} s \cdot f(w)$

Vektorraum über K: $r \cdot (f+g)(v) := r \cdot f(v) + r \cdot g(v)$

[$f: V \to K$ ist durch seine Bilder $f(v)$ definiert.]

Def. Der Vektorraum der lin. Abb. $f: V \to K$ heisst Dualraum von V und wird mit V^* bezeichnet. Die Vektoren aus V^* heissen lineare Funktionale und werden häufig mit v^* bezeichnet.

Bem. Der Nullvektor 0_{V^*} von V^* ist die Nullabbildung, d.h. $0_{V^*}(w) = 0 \in K$ (für alle $w \in V$).

III
2020

Unbeispiele: 1) $V = \mathbb{R}^2$; dann ist $g: V \to \mathbb{R}$

$w \mapsto \|w\| = \sqrt{w \cdot w}$

kein Element von V^*. warum?

2) $V = \mathbb{R}^2$; dann ist $h: V \to \mathbb{R}$

$\langle x,y \rangle \mapsto x \cdot y$

kein Element von V^*. warum?

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ und $v_0 \in V$, dann ist $v_0: V \to \mathbb{R}$

$w \mapsto v_0 \cdot w$

ein Element von V^*.

Satz: $\dim(V) = \dim(V^*)$

Beweis: Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und seien die Vektoren $\beta^1, \dots, \beta^n \in V^*$ wie folgt definiert:

$$\beta^i(b_j) = \begin{cases} 1 \in K & \text{für } i=j, \\ 0 \in K & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben auch $\beta^i(b_j) = \delta^i_j$ (δ-Symbol).

Wir definieren $\beta^i(r \cdot b_j) := r \cdot \beta^i(b_j)$, dann

gilt für $v = v^j b_j$: $\beta^i(v^j b_j) = v^i$

dim(V^*) ≤ dim(V): Ist $f \in V^*$ und gilt $f(b_j) = w_j$ (für $1 \leq j \leq n$),

so ist $f(v^j b_j) \underset{f \text{ linear}}{=} v^j f(b_j) = v^j w_j$.

D.h. $f = w_j \beta^j$, somit $f \in \langle \beta^1, \dots, \beta^n \rangle$,

woraus folgt $\langle \beta^1, \dots, \beta^n \rangle = V^*$.

dim(V) ≤ dim(V^*): Die Vektoren $\beta^1, \dots, \beta^n \in V^*$ sind linear unabhängig, denn $w_j \beta^j(b_i) = w_i$, d.h.

$w_j \beta^j \in V^*$ ist nur dann die Nullabbildung falls alle $w_j = 0$ sind. Somit sind die β^j's lin. unabh., woraus folgt: dim(V) ≤ dim(V^*).

⊣

Def. Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V, so heisst $\{\beta^1, \dots, \beta^n\} \subseteq V^*$ mit $\beta^j(b_i) = \delta^j_i$ die zu $\{b_1, \dots, b_n\}$ *duale Basis* von V^*.

Ist V ein Vektorraum über K, so auch V^*, und konsequenterweise ist auch der Raum der lin. Abbildungen $f^*: V^* \to K$ ein Vektorraum über K; dieser Vektorraum heisst *Bidualraum* von V und wird mit V^{**} bezeichnet. III

Der folgende Satz besagt, dass die Vektoren aus V in natürlicher Weise als Vektoren aus V^{**} aufgefasst werden können.

Satz. Die Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow V^{**}$$
$$w \longmapsto w^{**}$$

definiert durch $w^{**}(v^*) := v^*(w)$ ist ein Isomorphismus zwischen V und V^{**}.

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$; und für ein $v_0 \in V$ sei $v_0^* \in V^*$ definiert durch

$$v_0^*: V \to \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto v_0 \cdot w$$

dann können wir für $w_0 \in V$ definieren:

$$w_0^{**}: V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v^* \longmapsto v^*(w_0) = v \cdot w_0$$

Def. Sind V und W ~~zwei~~ Vektorräume über demselben Körper K und sei $\varphi: V \to W$ eine lin. Abb., so ist $\varphi^*: W^* \to V^*$

$$W^* \to V^*$$

definiert durch $$\underbrace{\overbrace{\varphi^*(w^*)}^{\in V^*}(v)}_{\in K} := \underbrace{w^*(\underbrace{\varphi(v)}_{\in W})}_{\in K}$$

die zu φ duale Abbildung.

$V^* \leftarrow W^*: \varphi^*$

$\varphi: V \longrightarrow W$

Satz. Mit φ ist auch φ^* linear.

Die Matrix der dualen Abbildung:

Sei $\varphi: V \to V$ eine lin. Abb., sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ und $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ ein Paar dualer Basen von V und V^* und sei $\varphi(b_j) = \mu^i_j b_i$; d.h. $\mu^{i \leftarrow \text{Zeile}}_{j \nwarrow \text{Spalte}}$ ist die Matrix von φ bzgl. b_i's.

$$(\mu^i_j) = \begin{pmatrix} \overset{\varphi(b_j)}{|} \end{pmatrix}$$

Weiter sei $\varphi^*: V^* \to V^*$ die zu φ duale Abbildung und sei $\varphi^*(\beta^i) = \eta^i_j \beta^j$; d.h. $\eta^{i \leftarrow \text{Zeile}}_{j \nwarrow \text{Spalte}}$

$$(\eta^i_j) = \begin{pmatrix} \text{———} \end{pmatrix} \varphi^*(\beta^i)$$

$$\eta^{i_0}_{j_0} = \varphi^*(\beta^{i_0})(b_{j_0})$$

$$= \beta^{i_0}(\varphi(b_{j_0})) = \beta^{i_0}(\mu^i_{j_0} b_i) = \mu^{i_0}_{j_0}$$

III 2020

Die Matrizen sind gleich, wobei μ^i_j eine "Spaltenmatrix" ist und η^i_j eine "Zeilenmatrix" ist; d.h. Matrizen sind transponiert.