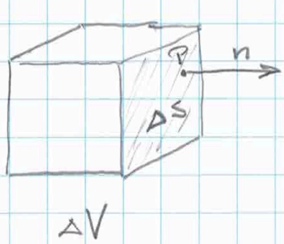
7 ANWENDUNGEN

7.1 Der Spannungstensor

- Kräfte, welche wie z.B. die Schwerkraft, auf alle Massenteile wirken, heissen Massenkräfte. Die Grösse dieser Kräfte ist dem Volumen proportional. Die Einheit der Massenkräfte ist Kraft / Volumen, es gilt also ein linearer Zusammenhang.

- Es gibt auch Kräfte, die nur auf die Begrenzungsfläche des Volumenelements ΔV wirken; diese rühren von den Nachbarelementen her. Diese sogenannten Flächenkräfte, auch Spannungen oder Drücke genannt, sind dem betreffenden Flächenelement proportional. Flächenelemente können verschiedene Lagen annehmen, wobei sich die Flächenkräfte verändern; es besteht also kein linearer Zusammenhang.

Sei nun ΔS ein Flächenelement, welches ΔV von einem $\Delta V'$ trennt, und sei n der von ΔV in einem Punkt P angehängte und von ΔV nach aussen weisende Normaleneinheitsvektor von ΔS.



Die auf das Flächenelement ΔS wirkende Flächenkraft bezeichnen wir mit

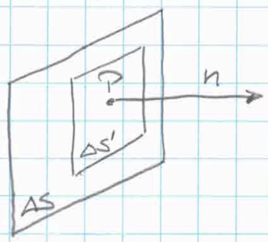
$$\Delta F = \Delta F^1 \cdot e_1 + \Delta F^2 \cdot e_2 + \Delta F^3 \cdot e_3 ,$$

wobei ΔF^i Skalare sind, nämlich die Richtungskomponenten von ΔF.

Weiter definieren wir

$$\sigma(n) := \lim_{\blacktriangle s \to 0} \frac{\Delta F}{\blacktriangle s}$$

wobei $\blacktriangle s$ den Flächeninhalt von Δs bezeichnet und die kleinerwerdenden Flächenstücke Δs alle in derselben Ebene liegen und den Punkt P enthalten.



Da die Flächenkraft proportional zum betreffenden Flächenelement ist, geht mit $\blacktriangle s \to 0$ auch $\Delta F \to 0$. Der Normaleneinheitsvektor n bleibt unverändert und hängt nur von der Ebene ab, in der die Flächenstücke Δs liegen.

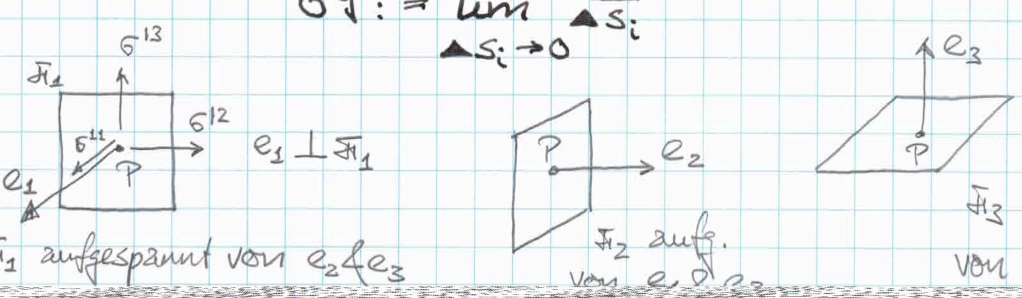
$\sigma(n)$ ist die Spannung im Punkt P bezüglich der Fläche mit Normaleneinheitsvektor n.

Def. Der Spannungstensor ist eine lineare Vektorfunktion die jedem Normaleneinheitsvektor n einen Spannungsvektor $\sigma(n) = F$ zuordnet.

Um die Komponenten von σ zu bestimmen, betrachten wir zuerst ein Volumenelement ΔV mit Begrenzungsflächen, welche parallel zu den Koordinatenebenen sind:

Δs_i habe den Normalenvektor e_i und sei

$$\sigma^{ij} := \lim_{\blacktriangle s_i \to 0} \frac{\blacktriangle F^i}{\blacktriangle s_i}$$

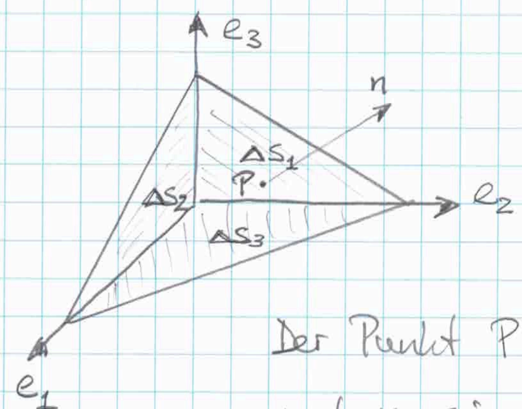


<u>Behauptung</u>: Die Spannung im Punkt P bezüglich einer Fläche durch P mit Normaleneinheitsvektor n ist

$$\sigma(n) = \sigma^{ij} \cdot (n \cdot e_i) \cdot e_j$$

wobei $\sigma(n) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$.

<u>Beweis</u>: Wir betrachten einen Tetraeder, welcher drei Flächen in den Koordinatenebenen hat und die vierte Seite den Normalenvektor n hat.



<u>Bem.</u> Für jede Ebene mit Normalenvektor n existiert solch ein Tetraeder.

Der Punkt P liegt im Flächenstück ΔS und n sei senkrecht auf ΔS.

Weil die Normalenvektoren nach aussen gerichtet sind, gilt $n_{S_i} = -e_i$.

Der Beitrag der Flächenstücke $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ ist somit:

$$-\sigma^{1j} e_j \cdot \Delta S_1 = \Delta F_1^j \cdot e_j$$
$$-\sigma^{2j} e_j \cdot \Delta S_2 = \Delta F_2^j \cdot e_j$$
$$-\sigma^{3j} \cdot e_j \cdot \Delta S_3 = \Delta F_3^j \cdot e_j$$

Weiter gilt:

$$\Delta F = \sigma(n) \cdot \blacktriangle s$$

und

$$\Delta F - \sigma^{ij} e_j \cdot \blacktriangle s_i = 0$$ da sich das Volumenelement nicht bewegt.

Somit erhalten wir:

$$\sigma(n) \cdot \blacktriangle s = \sigma^{ij} \cdot e_j \cdot \blacktriangle s_i$$

Nun müssen wir noch $\blacktriangle s_i$ aus $\blacktriangle s$ und n bestimmen.

Es gilt: $$\blacktriangle s_i = \blacktriangle s \cdot \underbrace{\cos(\alpha_i)}_{\text{Richtungs-cosinus}} = \blacktriangle s \cdot \underbrace{(n \bullet e_i)}_{\text{Skalarprodukt}}$$

Somit gilt: $$\sigma(n) \cdot \blacktriangle s = \sigma^{ij} \cdot e_j \cdot \blacktriangle s \cdot (n \bullet e_i) \quad \| : \blacktriangle s$$

$$\sigma(n) = \sigma^{ij} \cdot (n \bullet e_i) \cdot e_j$$

was zu zeigen war.

In Matrixschreibweise gilt:

$$\sigma(n) = (\sigma^{ij})^t \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Für die Spannung F bezüglich eines Flächenelements ΔS erhalten wir

$$F_S = \sigma(n_S) \cdot ds$$

wobei ds den Flächeninhalt $\blacktriangle s$ von ΔS bezeichnet und n_S der Normaleneinheitsvektor auf ΔS ist.