18/03/2020

2 TENSOREN I

In diesem Kapitel wird der Begriff "Tensor" definiert und ein paar Beispiele von Tensoren gegeben. Dazu betrachten wir zuerst lineare und multilineare Funktionen.

- Lineare Funktionen (Funktionale):

Sei V ein VR über $\mathbb{R}$. Dann ist

$$f: V \to \mathbb{R}$$

ein <u>lineares Funktional</u> falls für jede Linearkombination $r^i v_i \in V$ gilt:

$$f(r^i v_i) = r^i \cdot f(v_i).$$

Darstellung mit Matrizen:

Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V, so ist ein lin. Funktional $f: V \to \mathbb{R}$ durch die Werte $\lambda_i := f(b_i)$ bestimmt. Denn ist $v = r^i b_i \in V$ ein Vektor aus V, dann ist $f(v) = f(r^i b_i) = r^i \cdot f(b_i) = r^i \lambda_i$.

Schreiben wir $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ als Zeilenvektor und $v = \begin{pmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix}$ als Spaltenvektor, so ist

$$f(v) = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \cdot \begin{pmatrix} r^1 \\ \vdots \\ r^n \end{pmatrix} = \lambda_i r^i.$$

D.h. das lin. Funktional f kann auch als Zeilenvektor aufgefasst werden; umgekehrt kann jeder Zeilenvektor als lin. Funktional aufgefasst werden.

<u>Bem.</u> V^* kann als der VR der Zeilenvektoren aufgefasst werden und lin. Fkt. $f^*: V^* \to \mathbb{R}$ können als Spaltenvektoren aufgefasst werden.

- Bilineare Funktionen:

Seien V_0, V_1 VR über $\mathbb{R}$. Dann ist
$$\varphi : V_0 \times V_1 \to \mathbb{R}$$
eine <u>bilineare Funktion</u> falls für alle Linearkombs. $r^i v_i \in V_0$ und $s^j w_j \in V_1$ gilt
$$\varphi(r^i v_i, s^j w_j) = r^i s^j \varphi(v_i, w_j).$$

Darstellung mit Matrizen:
Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V_0 und $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m\}$ eine Basis von V_1, so ist eine bilineare Funktion φ durch die Werte $\mu_{ij} := \varphi(b_i, \tilde{b}_j)$ bestimmt.

- Multilineare Funktionen:

Seien $V_0, \dots, V_n$ VR über $\mathbb{R}$. Dann ist
$$\Phi : V_0 \times \dots \times V_n \to \mathbb{R}$$
eine <u>multilineare Funktion</u> falls für jedes $0 \le j \le n$ und alle $rv_j, sv_j' \in V_j$ gilt:
$$\Phi(v_0, \dots, v_{j-1}, rv_j + sv_j', v_{j+1}, \dots, v_n)$$
$$= r \cdot \Phi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_j, \dots v_n) + s \cdot \Phi(v_0, \dots, v_{j-1}, v_j', \dots, v_n).$$

D.h. die multilin. Funktion Φ ist eingeschränkt auf V_j für jedes j ein lin. Funktional.

Darstellung mit "verallgemeinerten Matrizen":
Sind $\{b_1^j, \dots, b_{n_j}^j\}$ jeweils Basen der VR V_j, so ist Φ durch die Werte $\Phi(b_{i_0}^0, b_{i_1}^1, \dots, b_{i_n}^n)$ bestimmt, wobei $1 \le i_j \le n_j$. Im Fall $V_0 = V_1 = V_2 = \mathbb{R}^3$

erhalten wir also eine $3 \times 3 \times 3$ - Matrix, bzw. einen $3 \times 3 \times 3$ - Würfel. Mit Hilfe dieses Würfels können wir dann jedem Tripel $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ eine reelle Zahl $\Phi(v_0, v_1, v_2)$ zuordnen.

- Tensoren (spezielle multilineare Funktionen):
  Sei V ein VR und sei V^* der Dualraum von V.
  Eine multilineare Funktion

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\text{-Faktoren}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\text{-Faktoren}} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist ein <u>p-fach kontravarianter</u> und <u>q-fach-kovarianter Tensor</u> (in V). Ist $p=0$ ($q=0$) so ist der Tensor <u>rein kovariant</u> (<u>rein kontravariant</u>).

Die Summe $p+q$ heisst die <u>Stufe</u> des Tensors.

<u>Beispiele von Tensoren:</u>

- $(0,1)$-Tensoren: Ein $(0,1)$-Tensor ist ein rein kovarianter Tensor 1. Stufe, d.h. ein lin. Funktional $T: V \rightarrow \mathbb{R}$. Umgekehrt ist jeder Vektor aus V^* ein rein kovarianter Tensor; deshalb heissen die Vektoren aus V^* auch <u>kovariante Vektoren</u>.

- $(1,0)$-Tensoren: Ein $(1,0)$-Tensor ist ein lin. Funktional $T: V^* \rightarrow \mathbb{R}$. Weil V^{**} mit V identifiziert werden kann, entspricht jedem Vektor aus V ein rein kontravarianter Tensor; deshalb heissen die Vektoren aus V auch <u>kontravariante Vektoren</u>.

- (1,1)-Tensoren: Wir haben gesehen, dass wir die Vektoren v^* aus V^* als Zeilenvektoren, und die Vektoren w aus V als Spaltenvektoren auffassen können.
  Ist $\dim(V) = n$ und A eine $n \times n$-Matrix, dann ist für $v^* \in V^*$ und $w \in V$ die Abbildung

$$\Phi_A : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle v^*, w \rangle \longmapsto v^* \cdot A \cdot w$$

ein (1,1)-Tensor.

<u>Bem.</u> Ist A die Einheitsmatrix, so entspricht Φ_A dem Skalarprodukt von v^{*T} und w. Das Skalarprodukt auf $V \times V$ ist ein (0,2)-Tensor, also ein rein kovarianter Tensor 2. Stufe. Analog ist das Skalarprodukt auf $V^* \times V^*$ ein (2,0)-Tensor.

Basiswechsel des "Skalarprodukts" in $\mathbb{R}^3$:

Wir betrachten den (1,1)-Tensor bzgl. den Standardbasen

$$\Phi_I : \mathbb{R}^{3*} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$\langle v^*, w \rangle \to v^* \cdot I \cdot w \quad \text{mit } I \text{ die Einheitsmatrix.}$$

- Sei $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{E} = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ die zu E duale Basis von $\mathbb{R}^{3*}$.
- Sei $v^* \in \mathbb{R}^{3*}$ mit $[v^*]_{\mathcal{E}} = (1\ -2\ 3)$; d.h. $v^* = 1 \cdot \varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3$,

  und $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; d.h. $w = 2 \cdot e_1 - 2e_2 + 1 \cdot e_3$.
- Wir erhalten $v^*(w) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 9$, oder anders ausgedrückt:

$$\underbrace{[v^*]_{\mathcal{E}}}_{\text{Zeilenvektor}} \underbrace{\cdot}_{\text{Matrixmult.}} \overbrace{[w]_E}^{\text{Spaltenvektor}} = 9$$

· In V wählen wir nun die Basis

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{[\tilde{b}_1]_E}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{[\tilde{b}_2]_E}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}}_{[\tilde{b}_3]_E} \right\}$$

und erhalten $\underbrace{L_{\tilde{\mathcal{B}}E}}_{=L} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Sei $\Lambda := L^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Wie sieht es in der neuen Basis aus?

Es gilt $[W]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \Lambda \cdot [W]_E = \begin{pmatrix}0\\-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ und weil $[W]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ & $[W]_E$ und $[V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*}$ & $[V^*]_{\mathcal{E}}$ dieselben Vektoren sind, muss gelten

$$[V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} \cdot [W]_{\tilde{\mathcal{B}}} = 9, \text{ also } [V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} \cdot \Lambda \cdot [W]_E = 9.$$

Damit dies gilt, müssen wir $[V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = [V^*]_{\mathcal{E}} \cdot L$ haben, denn dann gilt $[V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} \cdot [W]_{\tilde{\mathcal{B}}} = [V^*]_{\mathcal{E}} \cdot \underbrace{L \cdot \Lambda}_{\text{Id.}} \cdot [W]_E = [V^*]_{\mathcal{E}} \cdot [W]_E = 9$.

D.h. $[V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*} = [V^*]_{\mathcal{E}} \cdot L = (1\ {-2}\ 3) \cdot \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} = (-1\ {-3}\ {-6})$,

und wir erhalten $\underbrace{(-1\ {-3}\ {-6})}_{[V^*]_{\tilde{\mathcal{B}}^*}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{[W]_{\tilde{\mathcal{B}}}} = 0 + 6 + 3 = 9$.