Ko- & Kontravarianz des Spannungstensors:

Wir zeigen nun, dass σ ein $(1,1)$-Tensor ist, d.h. σ ist ein gemischter Tensor 2. Stufe. Dies wird dadurch gezeigt, dass wir untersuchen wie sich σ transformiert.

- Seien $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ zwei Basen und sei

$$\tilde{e}_i = L^j_i e_j \quad \text{und} \quad e_m = \Lambda^j_m \tilde{e}_j$$

wobei $L := L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Basistransformationsmatrix ist und $\Lambda = L^{-1}$.

- Sei n_s ein Normaleneinheitsvektor auf einer Fläche Δs mit Flächeninhalt ds. Die Spannung F_s ist dann:

$$F_s = \sigma^{ij}(n_s \cdot e_i)\cdot e_j \quad \text{bzw.} \quad \tilde{F}_s = \tilde{\sigma}^{ij}(\tilde{n}_s \cdot \tilde{e}_i)\cdot \tilde{e}_j$$

Somit erhalten wir $\tilde{F}_s = \tilde{\sigma}(\tilde{n}_s) = \Lambda\sigma(n_s)$, und weil gilt $n_s = L\cdot\tilde{n}_s$, erhalten wir

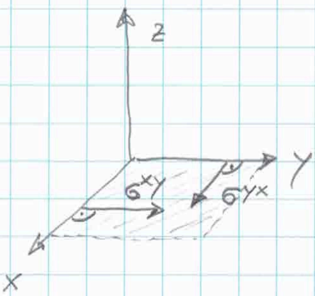
$$\tilde{F}_s = \Lambda\sigma(n_s) = \Lambda\sigma(L\cdot\tilde{n}_s) = \underbrace{\Lambda\sigma L}_{=\tilde{\sigma}}(\tilde{n}_s\cdot\tilde{e}_i)\cdot\tilde{e}_j.$$

Also gilt: $\quad \tilde{\sigma} = \Lambda\sigma L$

was zeigt, dass σ ein $(1,1)$-Tensor ist, denn nur $(1,1)$-Tensoren transformieren auf diese Weise.

Symmetrie des Spannungstensors bzgl. orth. Basis:

- Aus dem Reaktionsprinzip folgt: $\sigma(-n) = -\sigma(n)$
- Weiter gilt: $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$



Wäre $\sigma^{xy} \neq \sigma^{yx}$, so hätten wir in der xy-Ebene ein Drehmoment und das Volumenelement würde beginnen zu drehen; das ist aber nicht der Fall.

- Somit ist die Matrix des Spannungstensors symmetrisch.

Beispiel: Transformation eines Spannungstensors.

- Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Dann ist $\Lambda = L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Weiter sei $n = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann ist $\tilde{n} = \Lambda \cdot n = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}$.

- Dann ist $F = \sigma(n) = \sigma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

- Weiter ist $\tilde{F} = \Lambda \cdot \sigma(n) = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -28 \\ -8 \end{pmatrix}$

- Schliesslich ist auch $\tilde{F} = \tilde{\sigma}(\tilde{n}) = \Lambda \sigma L(\tilde{n}) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 \\ -21 & -7 & -7 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -28 \\ -8 \end{pmatrix}$

Transformation eines Spannungstensors von einer orthonormalen Basis in eine andere orthonormale Basis:

- Seien $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ zwei orthonormale Basen. Weiter sei $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Basistransformationsmatrix und sei $L = L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$.

- Dann ist $L^t = L^{-1}$, d.h. $\mathbb{1} = L^t$, und es gilt:

$$\tilde{\sigma} = L^t \sigma L$$

Diagonalisieren eines Spannungstensors:

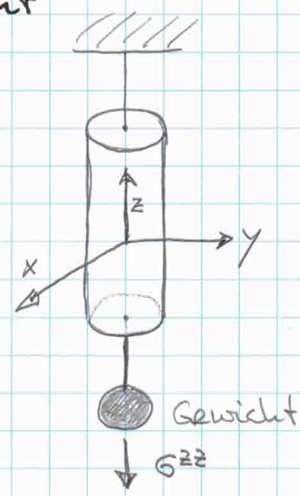
- Ist der Spannungstensor σ in einer orthogonalen Basis gegeben, so ist die zugehörige Matrix symmetrisch. Da es zu jeder symmetrischen Matrix eine orthogonale Basis gibt in der die Matrix Diagonalform hat, lässt sich jeder Spannungstensor diagonalisieren.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{zz} \end{pmatrix}$$

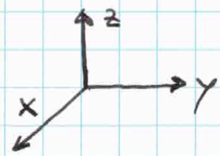
- Die Richtungen der Basisvektoren bzgl. jener σ Diagonalform hat heissen <u>Hauptspannungsrichtungen</u> und die Normalspannungen $\sigma^{xx}, \sigma^{yy}, \sigma^{zz}$ heissen <u>Hauptspannungen</u>.

- Hat der Spannungstensor Diagonalform, so treten keine sogenannten <u>Schub</u>- oder <u>Scherspannungen</u> auf. Materialien sind auf Scherspannungen empfindlicher als auf Normalspannungen. Zum Beispiel brechen Materialien entlang der Flächen mit maximaler Scherspannung.

Beispiel: Aufgehängter Stab mit Gewicht

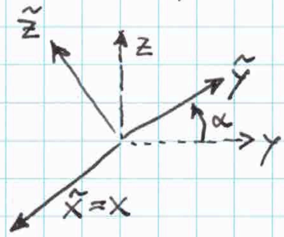


Im Koordinatensystem



$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{zz} \end{pmatrix}$$

Drehen wir das Koordinatensystem um den Winkel α um die x-Achse, so erhalten wir das Koordinatensystem



Die neue Basis ist

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right\}$$

und wir erhalten $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ und $\Lambda = L^t$.

Der Spannungstensor σ in der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ ist dann

$$\tilde{\sigma} = L^t \sigma L = \sigma^{zz} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

Scherspannungen!

Die Scherspannungen $\cos(\alpha)\sin(\alpha)$ sind maximal bei $\alpha = \pm 45°$. Somit bricht das Material entlang diesen Flächen!