Repetition Skalarprodukte:

Ein Skalarprodukt ist eine bilineare Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle v, w \rangle \longmapsto (v,w)$$

welche symmetrisch ist (d.h. $(v,w) = (w,v)$) und die positiv definit ist (d.h. $(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$).

Darstellung mit Matrizen:

Da Skalarprodukte spezielle $(0,2)$-Tensoren sind, lassen sie sich durch Matrizen ausdrücken.
Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von $V = \mathbb{R}^n$, und sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{ij} := (b_i, b_j),$$
wobei $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprod. ist.

Weiter sei $v = v^i b_i$ und $w = w^j b_j$. Dann ist $(v,w) = v^t \cdot A \cdot w$, d.h.

$$(v,w) = (v^1 \dots v^n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}.$$

Da gilt $(v,w) = (w,v)$, muss A symmetrisch sein, d.h. für alle $1 \leq i,j \leq n$ gilt $a_{ij} = a_{ji}$.

Eine notwendige Bedingung, dass A positiv definit ist, ist, dass A keine Eigenvektoren $\lambda \leq 0$ hat.

Winkel zwischen zwei von Null versch. Vektoren:

- Aus der Vektorgeometrie ist bekannt, dass mit Hilfe des Standardskalarprodukts, welches durch die Einheitsmatrix $Id_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ definiert ist, Winkel zwischen Vektoren definiert werden können:

  Für v, w mit $v \neq 0 \neq w$, definieren wir den Winkel ω zwischen v und w so, dass gilt
  $$\cos(\omega) := \frac{v \cdot w}{|v| \cdot |w|} \quad (\cdot \text{ ist das Skalarprodukt})$$

- Für allgemeine Skalarprodukte können wir ähnlich vorgehen: Sind v & w zwei von Null verschiedene Vektoren, so folgt aus der Schwarz'schen Ungleichung
  $$-1 \leq \frac{(v,w)}{|v| \cdot |w|} \leq 1$$
  d.h. es ex. eine Zahl ω mit $0 \leq \omega \leq \pi$ (Winkel zwischen $0°$ und $180°$) für die gilt:
  $$\cos(\omega) = \frac{(v,w)}{|v| \cdot |w|}.$$
  Die durch das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ eindeutig bestimmte Zahl ω ist der von v & w eingeschlossene Winkel, der mit $\omega(v,w)$ bezeichnet wird. Da das Skalarprodukt symmetrisch ist gilt:
  $$\omega(v,w) = \omega(w,v)$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren hängt also nicht nur von den Vektoren, sondern auch vom zugrunde gelegten Skalarprodukt ab.

<u>Satz</u> Für je zwei Vektoren eines Euklidischen Raumes gilt die Minkowskische Ungleichung:

$$|v+w| \leq |v|+|w|$$

Diese Ungleichung wird auch Dreiecksungleichung genannt.

<u>Beweis:</u> Wir wissen bereits $|v+w|^2 = |v|^2 + 2\cdot(v,w) + |w|^2$. Aus der Schwarz'schen Ungleichung folgt nun

$$|v+w|^2 \leq |v|^2 + \underbrace{2\cdot|v|\cdot|w|}_{\geq 0} + |w|^2 = \left(|v|+|w|\right)^2$$

und somit ist $|v+w| \leq |v|+|w|$.

$\dashv$

5.2 Orthogonale Basen in Euklidischen Räumen

Eine Basis $u_1, \ldots, u_n$ eines Euklidischen Raumes heisst <u>orthonormiert</u>, wenn gilt $|u_i| = 1$ (für $1 \leq i \leq n$) und die Vektoren u_i paarweise orthogonal sind, d.h. $(u_i, u_j) = \delta^i_j$ für alle $1 \leq i,j \leq n$. Der Ausdruck orthonormiert bedeutet also paarweise <u>orthogonal</u> und <u>normiert</u> ("Länge = 1").

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $v = r^i u_i$ und $w = s^i u_j$ erhält man bzgl. einer orthonormierten Basis $u_1, \ldots, u_n$ den Ausdruck

$$(v,w) = r^1 s^1 + \ldots + r^n \cdot s^n.$$

Das Skalarprodukt verhält sich bezüglich einer orthonormierten Basis also wie das Standardskalarprodukt.

Die Komponenten eines Vektors v bezüglich einer orthonormierten Basis $u_1, \ldots, u_n$ erhält man wie folgt:

Ist $v = r^i \cdot u_i$, so ist $(v, u_i) = r^i$,

d.h. $v = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(v, u_i)}_{= r^i} \cdot u_i$.

Für die eingeschlossenen Winkel zwischen v und u_i gilt:

$$\cos(\omega_i) = \frac{(v, u_i)}{|v| \cdot \underbrace{|u_i|}_{=1}} = \frac{(v, u_i)}{|v|} = \frac{r^i}{|v|} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Somit gilt $r^i = \cos(\omega_i) \cdot |v|$. Ist nun $|v| = 1$, also v ein Einheitsvektor, so ist

$$r^i = \cos(\omega_i).$$

Die Werte $\cos(\omega_i)$ heissen <u>Richtungscosinusse</u> von v bezüglich der orthonormierten Basis $u_1, \ldots, u_n$.

Ist irgend ein Skalarprodukt gegeben, so ist es hilfreich, wenn man alle Rechnungen bezüglich einer orthonormierten Basis ausführt. Dass es zu jedem Skalarprodukt eine orthonormierte Basis gibt, ist deshalb ein wichtiger Satz.

<u>Satz</u> Jeder Euklidische Raum V besitzt eine orthonormierte Basis.

Die Konstruktion einer orthonormierten Basis wird, ausgehend von einer beliebigen Basis in V, mit Hilfe des <u>Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren</u> durchgeführt (und wurde in der "linearen Algebra" bewiesen).

Beispiel: Wir betrachten wieder das Skalarprodukt, das in der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$ gegeben ist durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren konstruieren wir nun eine orthonormierte Basis:

$$\tilde{u}_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = e_2 - \frac{(\tilde{u}_1, e_2)}{(\tilde{u}_1, \tilde{u}_1)} \cdot \tilde{u}_1$$

$$= e_2 - \frac{5}{1} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\tilde{u}_1$ & $\tilde{u}_2$ sind orthogonal (bzgl. T) aber eventuell noch nicht normiert, wir müssen also $\tilde{u}_1$ & $\tilde{u}_2$ noch normieren:

$$u_1 = \frac{1}{|\tilde{u}_1|} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{u}_1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{|\tilde{u}_2|} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall waren $\tilde{u}_1$ & $\tilde{u}_2$ bereits normiert.

Bezüglich der Basis $\{u_1, u_2\}$ verhält sich das Skalarprodukt T also wie das Standardskalarprodukt.

<u>Basiswechsel:</u> Ist T ein Skalarprodukt, so ist T ein $(0,2)$-Tensor. Ist L die Transformationsmatrix des Basiswechsels, so ist

$\tilde{T} = L^t \cdot T \cdot L$ die Matrix des Tensors T in der neuen Basis.

<u>Beispiel</u> Da T vom vorherigen Beispiel bzgl. der Basis $\{u_1, u_2\}$ sich wie das Standardskalarprodukt verhält, sollte also $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein; das überprüfen wir nun:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \; ; \quad L = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}}_{=u_1} & \underbrace{\begin{matrix} -5 \\ 1 \end{matrix}}_{=u_2} \end{pmatrix}$$

Nun ist $\tilde{T} = L^t \cdot T \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, was wir erwartet haben.

<u>Beispiel</u> Basiswechsel von $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Sei $[v]_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis $E = \{e_1, e_2\}$.

Gesucht $[v]_{\mathcal{B}}$ bzgl. der orthonormierten Basis $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$.

$$(v, u_1) = (4 \;\; -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$(v, u_2) = (4 \;\; -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$

Also ist $v = -6 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2$, bzw. $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Zum Schluss berechnen wir (v,v):

- Bezüglich der Basis $E = \{e_1, e_2\}$ ist $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$
und das Skalarprodukt entspricht der Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$.
D.h. $(v,v) = (4 \; -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 40.$

- Bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ ist $v = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$
und das Skalarprodukt entspricht der Matrix $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D.h. $(v,v) = (-6 \; -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = 40.$

Orthogonale Transformationen:

Seien $\{b_1, \dots, b_n\}$ & $\{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$ zwei orthogonale Basen (nicht notwendigerweise normiert). D.h. $(b_i, b_k) = \lambda_k \cdot \delta^i_k$ und $(\tilde{b}_i, \tilde{b}_k) = \tilde{\lambda}_k \cdot \delta^i_k$, wobei $\lambda_k, \tilde{\lambda}_k$ ungleich Null sind.

Ist L die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{B} \to \tilde{\mathcal{B}}$, also $\tilde{b}_i = L^j_i \, b_j$, so gilt

$$\sum_j L^j_i \, L^j_k = \lambda_k \delta^i_k \qquad (\lambda_k \neq 0).$$

Somit erhalten wir: $\underbrace{L^i_j}_{=(L^j_i)^t} \cdot L^j_k$ (als Matrix) hat Diagonalform.

Beispiel: Bezüglich dem Standardskalarprodukt sind die beiden Basen $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ orthogonal.

$L = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $L^t \cdot L = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat Diagonalform.