25/03/2020

3 DETERMINANTEN

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Eine Determinantenfunktion Δ ist eine multilineare Abbildung

$$\Delta: V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$
$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_n)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Die Funktion Δ ist nicht identisch gleich 0.
- Die Funktion Δ ist linear in jedem Argument, d.h. $\Delta(v_1, \ldots, \lambda \cdot v_i + \mu \cdot v_i', \ldots v_n) =$
$$\lambda \cdot \Delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + \mu \cdot \Delta(v_1, \ldots, v_i', \ldots v_n).$$
- Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ lin. abhängig, so ist $\Delta(v_1, \ldots, v_n) = 0$; und umgekehrt.
- Δ ist schiefsymmetrisch, d.h.
$$\Delta(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_n) = -\Delta(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

In der Terminologie der Tensoren ist also eine Determinantenfunktion
$$\Delta: V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$
ein n-stufiger, rein kovarianter (total schiefsymmetrischer) Tensor, also ein $(0,n)$-Tensor.

Matrizen: Schreiben wir $v_1, \ldots, v_n$ als Spaltenvektoren, so ist $\Delta\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ eine Determinantenfunktion.

Schreiben wir $v_1, \ldots, v_n$ als Zeilenvektoren, so ist

$\Delta\begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix}$ ein $(n,0)$-Tensor, also eine multilineare

Funktion $\quad \Delta : V^* \times \cdots \times V^* \to \mathbb{R}$

$$\langle v_1^*, \dots, v_n^* \rangle \mapsto \Delta(v_1^*, \dots, v_n^*).$$

- Determinantenfunktionen sind bis auf Faktoren <u>eindeutig</u> bestimmt.

<u>Zwei Beispiele</u>

- $n=2$: $\quad V = \mathbb{R}^2, \quad \Delta : V \times V \to \mathbb{R}$, Basis in V: $\{e_1, e_2\}$.

  Um $\Delta(v_1, v_2)$ zu berechnen, müssen wir $\Delta(e_i, e_j)$ kennen für $1 \le i,j \le 2$.

  Aus den Eigenschaften einer Determinantenfunktion wissen wir

  $$\Delta(e_1, e_1) = 0 = \Delta(e_2, e_2)$$

  $$\text{und} \quad \Delta(e_1, e_2) = -\Delta(e_2, e_1).$$

  Setzen wir

  $$\Delta_{i,j} := \Delta(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i=j, \\ \lambda & \text{für } i=1, j=2, \\ -\lambda & \text{für } i=2, j=1, \end{cases}$$

  wobei $\lambda \neq 0$ beliebig ist, so erhalten wir:

$$\Delta(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) =$$

$$a \cdot \Delta(e_1, ce_1 + de_2) + b \cdot \Delta(e_2, ce_1 + de_2) =$$

$$a \cdot c \cdot \underbrace{\Delta(e_1, e_1)}_{=0} + a \cdot d \cdot \underbrace{\Delta(e_1, e_2)}_{=\lambda} + b \cdot c \cdot \underbrace{\Delta(e_2, e_1)}_{=-\lambda} + b \cdot d \cdot \underbrace{\Delta(e_2, e_2)}_{=0}$$

$$= \lambda \cdot (a \cdot d - b \cdot c)$$

wobei $ad - bc = \left| \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right|$ die "übliche" <u>Determinantenfunktion</u> ist.

Im Fall $n=2$ kann $\Delta : V\times V \to \mathbb{R}$ mit einer Matrix identifiziert werden:

Wir schreiben $D = \begin{pmatrix} \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} \\ \Delta_{2,1} & \Delta_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$

dann ist $$\Delta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = (a\ b)\cdot D \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

- $n=3$: $V=\mathbb{R}^3$, $\Delta : V\times V\times V \to \mathbb{R}$, Basis in V: $\{e_1, e_2, e_3\}$.

  Seien $u = u^i e_i$, $v = v^j e_j$, $w = w^k e_k$ drei Vektoren aus V. Um $\Delta(u,v,w)$ zu berechnen, müssen wir $\Delta(e_i, e_j, e_k)$ kennen für alle $1\le i,j,k\le 3$. Ist zum Beispiel $\Delta(e_1, e_2, e_3) = \lambda$, so erhalten wir

$$\Delta_{i,j,k} = \Delta(e_i, e_j, e_k) = \begin{cases} & i\ j\ k \\ \lambda & 1\ 2\ 3 \\ -\lambda & 2\ 1\ 3 \\ \lambda & 2\ 3\ 1 \\ -\lambda & 3\ 2\ 1 \\ \lambda & 3\ 1\ 2 \\ -\lambda & 1\ 3\ 2 \end{cases}$$

  und es gilt $$\Delta(u^i e_i, v^j e_j, w^k e_k) = u^i v^j w^k \cdot \Delta_{i,j,k}.$$

Im Fall $n=3$ können wir $\Delta : V\times V\times V \to \mathbb{R}$ nicht mehr mit einer Matrix identifizieren, wir könnten Δ aber durch einen $3\times 3\times 3$-Würfel darstellen; das machen wir aber nicht.

[Beim $3\times3\times3$-Würfel kann man sich überlegen, wo λ, wo $-\lambda$, und wo 0 steht.]

4 TENSOREN II

4.1 Das Tensorprodukt

Seien $T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to \mathbb{R}$

und $U: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{\ell} \to \mathbb{R}$

zwei Tensoren, d.h. T ist ein (p,q)-Tensor und U ist ein (k,ℓ)-Tensor.

Das Tensorprodukt $T \otimes U$ ist dann ein $(p+k, q+\ell)$-Tensor, der definiert ist durch

$$T \otimes U \, (\beta^1, \ldots, \beta^{p+k}, b_1, \ldots, b_{q+\ell}) :=$$
$$T(\beta^1, \ldots, \beta^p, b_1, \ldots, b_q) \cdot U(\beta^{p+1}, \ldots, \beta^{p+k}, b_{q+1}, \ldots, b_{q+\ell}).$$

- Es gilt, dass $T \otimes U$ und $U \otimes T$ beides $(p+k, q+\ell)$-Tensoren sind.
- Im Allgemeinen sind $T \otimes U$ und $U \otimes T$ aber verschiedene Tensoren, d.h. $T \otimes U \neq U \otimes T$, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel in $\mathbb{R}^2$: Seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Wir betrachten v & u als Vektoren im bidual-Raum $\mathbb{R}^{2**}$, und seien T_v & T_u die entsprechenden $(1,0)$-Tensoren. D.h.

$$T_v(w^*) := w^* \cdot v \quad \& \quad T_u(w^*) := w^* \cdot u.$$

Zeilenvektor Matrixmultiplikation Spaltenvektor

Sei nun $w_1^* = (1\ 1)$ und $w_2^* = (3\ {-2})$.

Dann ist
$$T_v \otimes T_u (w_1^*, w_2^*) = T_v(w_1^*) \underset{\text{mult. in } \mathbb{R}}{\cdot} T_u(w_2^*)$$
$$= (w_1^* \cdot v) \cdot (w_2^* \cdot u)$$
$$= \left((1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \left((3\ {-2}) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= (1+2) \cdot (-3 + (-2)) = 3 \cdot (-5) = -15$$

Andererseits ist
$$T_u \otimes T_v (w_1^*, w_2^*) = T_u(w_1^*) \cdot T_v(w_2^*)$$
$$= (w_1^* \cdot u) \cdot (w_2^* \cdot v)$$
$$= \left((1\ 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \left((3\ {-2}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= 0 \cdot (-1) = 0$$

Somit ist $T_v \otimes T_u \neq T_u \otimes T_v$.

<u>Matrizenform</u>: Sei $T_{vu} := T_v \otimes T_u$ und sei $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^{2*}$. Dann ist
$$T_{vu} = \begin{pmatrix} T_{vu}(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & T_{vu}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \\ T_{vu}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & T_{vu}(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[Wie sieht die Matrix für den (2,0)-Tensor T_{uv} aus?]