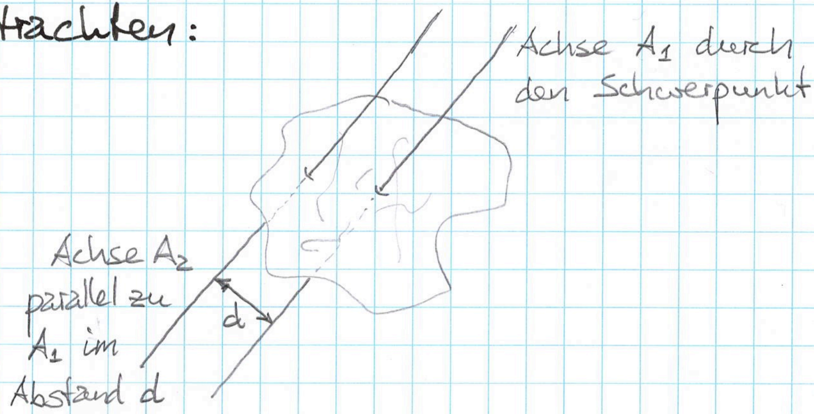
7.2 Trägheitstensor & Trägheitsellipsoid

Mit dem Satz von Steiner brauchen wir, um das Trägheitsmoment eines starren Körpers (der um eine Achse rotiert) zu berechnen, nur Achsen durch den Schwerpunkt zu betrachten:



Ist J_1 das Trägheitsmoment des Körpers mit Masse m bzgl. der Achse A_1, so ist

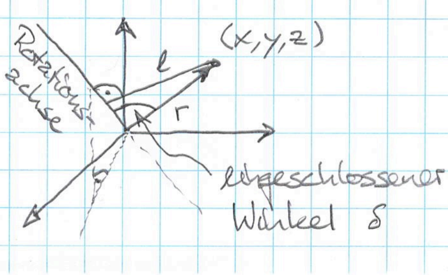
$$J_2 = J_1 + m \cdot d^2$$

das Trägheitsmoment des Körpers bzgl. A_2.

Sei nun xyz ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt eines starren Körpers. Der Körper rotiere um eine feste Achse durch den Ursprung (sogenannte Schwereachse). Die Richtungscosinusse seien $\cos(\alpha_0)$, $\cos(\beta_0)$, $\cos(\gamma_0)$, also

$$n_A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0) \\ \cos(\beta_0) \\ \cos(\gamma_0) \end{pmatrix}.$$

Sei dm ein Massenelement mit den Koordinaten (x,y,z).



Es gilt:
- $|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2$
- ℓ ist der Abstand zwischen dm und der Rotationsachse
- $\ell = |r \cdot \sin(\delta)|$

Wir berechnen nun das Trägheitsmoment des Körpers bzgl. der gegebenen Rotationsachse:

$$\Theta_{\alpha_0\beta_0\gamma_0} = \int \ell^2 \, dm = \int (r \cdot \sin(\delta))^2 \, dm \qquad (*)$$

Es gilt: $(r \cdot \sin(\delta))^2 = |r \times n_A|$

$$= (y \cdot \cos(\gamma_0) - z \cdot \cos(\beta_0))^3$$
$$+ (z \cdot \cos(\alpha_0) - x \cdot \cos(\gamma_0))^2$$
$$+ (x \cdot \cos(\beta_0) - y \cdot \cos(\alpha_0))^2$$

Wir definieren nun folgende 6 Grössen:

Trägheitsmomente um x, y, z - Achse

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Theta_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm & \Theta_{xy} = \int xy \, dm \\ \Theta_{yy} = \int (z^2 + x^2) \, dm & \Theta_{yz} = \int yz \, dm \\ \Theta_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm & \Theta_{zx} = \int zx \, dm \end{array} \right\}$$

Deviationsmomente

Es gilt $\Theta_{xx} + \Theta_{yy} > \Theta_{zz}$; $\Theta_{yy} + \Theta_{zz} > \Theta_{xx}$; etc.

Wir erhalten nun:

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha_0\beta_0\gamma_0} = {} & \Theta_{xx} \cos^2(\alpha_0) + \Theta_{yy} \cos^2(\beta_0) + \Theta_{zz} \cos^2(\gamma_0) \\ & - 2\Theta_{xy} \cos(\alpha_0) \cos(\beta_0) - 2\Theta_{yz} \cos(\beta_0) \cos(\gamma_0) \\ & - 2\Theta_{zx} \cos(\gamma_0) \cos(\alpha_0) \end{aligned} \qquad (**)$$

Der Trägheitstensor ist definiert als

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & -\Theta_{xy} & -\Theta_{xz} \\ -\Theta_{yx} & \Theta_{yy} & -\Theta_{yz} \\ -\Theta_{zx} & -\Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Trägheitstensors:

- Der Trägheitstensor ist symmetrisch.
- Θ ordnet jedem Einheitsvektor $n_A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_0) \\ \cos(\beta_0) \\ \cos(\gamma_0) \end{pmatrix}$ ein Trägheitsmoment zu; also jedem Vektor n_A ein Skalar.

Somit ist der Trägheitstensor eine quadratische Funktion (mit symm. Bilinearfunktion), also ein $(0,2)$-Tensor.

In Matrixschreibweise gilt: $\Theta(n_A) = n_A^t \cdot \Theta \cdot n_A$

Nun tragen wir in jede Richtung eines Einheitsvektors $n_{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$ vom Ursprung aus eine Strecke der Länge $r_{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}$ ab. Der Endpunkt einer solchen Strecke hat dann die Koordinaten

$$\tilde{x} = r_{\alpha\beta\gamma} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}} \; ; \; \tilde{y} = \frac{\cos(\beta)}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}} \; ; \; \tilde{z} = \frac{\cos(\gamma)}{\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}}$$

Mit der Gleichung $(\ast\ast)$ folgt, dass die Endpunkte dieser Strecken folgende Gleichung erfüllen:

$$\Theta_{xx}\tilde{x}^2 + \Theta_{yy}\tilde{y}^2 + \Theta_{zz}\tilde{z}^2 - 2\Theta_{yz}\tilde{y}\tilde{z} - 2\Theta_{xz}\tilde{x}\tilde{z} - 2\Theta_{xy}\tilde{x}\tilde{y} = 1$$

Diese Gleichung stellt eine Fläche 2. Ordnung dar mit Zentrum im Ursprung; und aus den Eigenschaften der Θ's folgt, dass es die Oberfläche eines Ellipsoids ist, des sogenannten <u>Trägheitsellipsoids</u>.

Die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids heissen <u>Hauptträgheitsachsen</u>.

<u>Bem.</u> Da wir durch $\sqrt{\Theta_{\alpha\beta\gamma}}$ dividiert haben sind die Achsen des Ellipsoids umso kürzer, je grösser das entsprechende Trägheitsmoment ist.

Da der Trägheitstensor Θ symmetrisch ist, hat Θ bezüglich einer orthonormalen Basis Diagonalform, wobei auf der Diagonale die Eigenwerte von Θ stehen:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{bzgl. orthonormaler Basis } \{u_1, u_2, u_3\}.$$

$$u_i^t \cdot \Theta \cdot u_i = \lambda_i$$

Setzen wir $\tilde{e}_i := \dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, so sind $\tilde{e}_i$ die Hauptachsen des Trägheitsellipsoids und es gilt: $\tilde{e}_i^t \cdot \Theta \cdot \tilde{e}_i = 1$.

<u>Erinnerung:</u> In der ersten Stunde haben wir gesehen, dass eine in der Luft rotierende Schachtel nur entlang der längsten und kürzesten Achse stabil rotiert; diese Achsen entsprechen der längsten und kürzesten Achse des Trägheitsellipsoids.