6 BILINEARFUNKTIONEN $(V = \mathbb{R}^n)$

Bilinearfunktionen sind Funktionen $T: V \times V \to \mathbb{R}$
$$\langle v, w \rangle \mapsto T(v,w)$$
die in beiden Argumenten linear sind. Bilinearfunktionen sind also (0,2)-Tensoren. Wie wir gesehen haben, können (0,2)-Tensoren durch Matrizen dargestellt werden:

$$T(v,w) := v^t \cdot M \cdot w \qquad (M \text{ eine } n \times n\text{-Matrix})$$

6.1 Symmetrische Bilinearfunktionen

(0,2)-Tensoren T für die gilt $T(v,w) = T(w,v)$ (für alle $v, w \in V$) heissen symmetrische Bilinearfunktionen.

Bsp. Skalare Produkte sind sym. Bilinearfunktionen (zusätzlich sind diese noch positiv definit).

Die Matrix einer sym. Bilinearfunktion ist symmetrisch, und umgekehrt entspricht jeder symmetrischen Matrix eine sym. Bilinearfunktion: Für jede sym. Matrix M, d.h. $M^t = M$, und alle $v, w \in V$ gilt:

$$\underbrace{v^t \cdot M \cdot w}_{T(v,w)} = \underbrace{w^t \cdot M \cdot v}_{T(w,v)}$$

Im Folgenden sei (v,w) das Standard-Skalarprodukt und T eine sym. Bilinearfunktion mit sym. Matrix M. Dann gilt:
$$\begin{aligned} T(v,w) &= v^t \cdot M \cdot w = (v, Mw) = (Mw, v) \\ &= T(w,v) = w^t \cdot M \cdot v = (w, Mv) = (Mv, w) \end{aligned} \qquad (*)$$

<u>Satz</u> Sei $V = \mathbb{R}^n$ und M eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann hat M bzgl. dem Standard-Skalarprodukt n paarweise orthogonale Eigenvektoren. Insbesondere hat die Matrix des entsprechenden sym. $(0,2)$-Tensors bzgl. dieser orthogonalen Basis Diagonalform.

<u>Bemerkungen:</u> Wir haben bereits gesehen, dass sich sym., positiv definite Matrizen immer diagonalisieren lassen, nämlich mit dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren. Bei diesem Verfahren war es wesentlich, dass die Matrix pos. definit war, damit wir durch $(v, Mv) \neq 0$ dividieren konnten. Der obige Satz sagt nun, dass auch nicht pos. def. Matrizen diagonalisiert werden können, sofern sie symmetrisch sind; der Beweis liefert aber kein Verfahren um die Matrix zu diagonalisieren, sondern beweist nur, dass dies möglich ist.

<u>Beweis:</u> Zuerst konstruieren wir einen Eigenvektor von M: Dazu betrachten wir die Funktion $F: V \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \frac{(x, Mx)}{(x, x)} \qquad (\text{für } x \in V,\ x \neq 0).$$

Da das Standard-Skalarprodukt positiv definit ist, ist $F(x)$ für alle $x \in V$, $x \neq 0$ definiert.

Schränken wir die Funktion F auf die Menge der Einheitsvektoren $x \in V$, $|x| = 1$, ein, so nimmt die Funktion F auf dieser Menge ein Minimum an (der Grund dafür ist, dass die Menge $\{x \in V : |x| = 1\}$ kompakt ist und die Funktion F stetig ist).

Ist u_1 ein Einheitsvektor in dem F minimal ist (es kann mehrere solche Vektoren geben), so gilt für alle Einheitsvektoren $e \in V$:

$$F(e) \geq F(u_1)$$

Daraus folgt, dass $F(u_1)$ sogar ein Minimum der Funktion F bzgl. ganz V ist. Denn sei $x \in V$ irgend ein Vektor, dann ist $x = |x| \cdot e_x$ für $e_x = \frac{x}{|x|}$ (d.h. $|e_x| = 1$) und es gilt:

$$F(x) = \frac{(x, Mx)}{(x,x)} = \frac{|x|^2 \cdot (e_x, Me_x)}{|x|^2 \cdot (e_x, e_x)} = F(e_x),$$

somit ist $F(x) = F(e_x) \geq F(u_1)$ (weil $|e_x| = 1$).

Wir zeigen nun, dass u_1 ein Eigenvektor von M ist:
Dazu bezeichne $y_0 \in V$ einen festen, von Null verschiedenen Vektor und r einen reellen Parameter, d.h. $r \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$$F(u_1 + r \cdot y_0) \geq F(u_1),$$

d.h. die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto F(u_1 + r \cdot y_0)$$

besitzt für $r = 0$ ein (lokales) Minimum. Es muss also gelten:

$$f'(0) = 0$$

Wir bestimmen nun $f'(0)$:

$$f(r) = F(u_1 + r \cdot y_0) = \frac{(u_1 + ry_0, M \cdot (u_1 + ry_0))}{(u_1 + ry_0, u_1 + ry_0)} = \frac{g(r)}{h(r)}$$

Ist $f'(0) = 0$, so gilt mit der Quotientenregel:

$$g'(0) \cdot h(0) - g(0) \cdot h'(0) = 0$$

Wir berechnen nun $g(0), h(0), g'(0), h'(0)$:

- $g(0) = (u_1, Mu_1)$
- $h(0) = (u_1, u_1) = 1 \quad (|u_1| = 1)$
- $g(r) = (u_1, Mu_1) + r\cdot(u_1, My_0) + r\cdot(y_0, Mu_1) + r^2\cdot(y_0, My_0)$

$$\Rightarrow g'(0) = (u_1, My_0) + (y_0, Mu_1) \overset{\text{wegen } (*) \text{ p. 31}}{=} 2\cdot(y_0, Mu_1)$$

- $h(r) = (u_1, u_1) + r\cdot(u_1, y_0) + r(y_0, u_1) + r^2(y_0, y_0)$

$$\Rightarrow h'(0) = 2(u_1, y_0)$$

Damit erhalten wir

$$0 = g'(0)\cdot \underbrace{h(0)}_{=1} - g(0)\cdot h'(0)$$
$$= 2\cdot(y_0, Mu_1) - 2\cdot(u_1, Mu_1)\cdot(u_1, y_0)$$
$$\Rightarrow (y_0, Mu_1) = (y_0, u_1)\cdot \underbrace{(u_1, Mu_1)}_{=:\lambda}$$

also $(y_0, \underline{\underline{Mu_1}}) = \lambda\cdot(y_0, u_1) = (y_0, \underline{\underline{\lambda u_1}})$.

Da $y_0 \in V$ beliebig war und λ nicht von y_0 abhängt, sondern nur von u_1, erhalten wir:

$$Mu_1 = \lambda u_1$$

D.h. u_1 ist ein Eigenvektor von M und $\lambda = (u_1, Mu_1)$ ist der zugehörige Eigenwert.

Nun betrachten wir $u_1^\perp = \{x \in V : (x, u_1) = 0\}$:

- $u_1^\perp$ ist ein $(n-1)$-dim. Unterraum von $V = \mathbb{R}^n$.
- Für alle $x \in u_1^\perp$ ist $Mx \in u_1^\perp$: $(Mx, u_1) = (x, Mu_1) = (x, \lambda u_1)$
$$= \lambda\cdot(x, u_1) = 0$$

Wir können nun im $(n-1)$-dim. Unterraum $U_1^\perp$ wieder beginnen und mit Hilfe der Funktion $F_1^\perp(x)$ können wir einen zu u_1 orthogonalen Vektor u_2 finden, der Eigenvektor von M ist.

Schliesslich erhalten wir so paarweise orthogonale Eigenvektoren von M.

$\dashv$

<u>Beispiel</u>: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Die Einheitsvektoren in V sind von der Form

$$v = (x, \sqrt{1-x^2})^t.$$

Sei $$F(v) = \frac{\left((x,\sqrt{1-x^2})^t, M\cdot (x,\sqrt{1-x^2})^t \right)}{\left((x,\sqrt{1-x^2})^t, (x,\sqrt{1-x^2})^t \right)}.$$

Wir leiten F nach x ab und setzen

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, dann erhalten wir

$$x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

- Der Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist also ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $(u_1, Mu_1) = -(2+3\cdot\sqrt{2})$.

- $u_1^\perp$ ist ein 1-dim. Unterraum von V, der z.B. den Vektor $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$ enthält.

  u_2 ist ebenfalls ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $-2+3\cdot\sqrt{2}$.

- Bezüglich der Basis $\{u_1, u_2\}$ hat M Diagonalform.