Lineare Abbildungen (zwischen Vektorräumen über demselben K)

Seien V & W zwei Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heisst *linear* falls gilt: $(r,s \in K;\ v,w \in V)$

$$\varphi(\overbrace{r\cdot v \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } V}}{+} s\cdot w}^{\text{in } V}) = \overbrace{r\cdot\varphi(v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } W}}{+} s\cdot\varphi(w)}^{\text{in } W}$$

Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und $v = v^i b_i$ ein Vektor in V. Ist φ eine lin. Abb. von V nach W, so ist $\varphi(v) = \varphi(v^i b_i) = v^i \varphi(b_i)$.

Als Matrix geschrieben:

$$\varphi(v) = \underbrace{\begin{array}{ccc} \varphi(b_1) & \cdots & \varphi(b_n) \\ \end{array}}_{}\! \quad \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ \varphi(b_1) & \cdots & \varphi(b_n) \\ | & & | \end{pmatrix}}_{A_\varphi} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

Basiswechsel:

schreiben $\tilde{b}_i$ als Lin.-Komb. der b_i's.

$$\begin{array}{ccc} V_{\tilde{\mathcal{B}}} & \xrightarrow[\tilde{A}_\varphi]{\varphi} & V_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ \downarrow L & & \uparrow L^{-1} \\ V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow[A_\varphi]{\varphi} & V_{\mathcal{B}} \end{array}$$

$$\overbrace{L^{-1} A_\varphi L}^{\tilde{A}_\varphi} [v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$$

mit Matrizen:

$$\begin{array}{ccc} [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} & \xrightarrow[\tilde{A}_\varphi]{\varphi} & [\varphi(v)]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \tilde{A}_\varphi \cdot [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ \downarrow L & & \uparrow L^{-1} \\ L\cdot[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = [v]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow[A_\varphi]{\varphi} & [\varphi(v)]_{\mathcal{B}} = \underbrace{A_\varphi \cdot [v]_{\mathcal{B}}}_{A_\varphi L [v]_{\tilde{\mathcal{B}}}} \end{array}$$

Somit gilt: $\boxed{\tilde{A}_\varphi = L^{-1} A_\varphi L}$

1 DER DUALRAUM

Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so ist der Raum aller linearen Abbildungen $f: V \to K$ ebenfalls ein Vektorraum über K.

$f: V \to K$ linear heisst: $f(\underbrace{r \cdot v + s \cdot w}_{\text{in } V}) = \underbrace{r \cdot f(v) + s \cdot f(w)}_{\text{in } K}$

Vektorraum über K: $r \cdot (f+g)(v) := r \cdot f(v) + r \cdot g(v)$
[$f: V \to K$ ist durch seine Bilder $f(v)$ definiert.]

Def. Der Vektorraum der lin. Abb. $f: V \to K$ heisst Dualraum von V und wird mit V^* bezeichnet. Die Vektoren aus V^* heissen lineare Funktionale und werden häufig mit v^* bezeichnet.

Bem. Der Nullvektor 0_{V^*} von V^* ist die Nullabbildung, d.h. $0_{V^*}(w) = 0 \in K$ (für alle $w \in V$).

III
2020

Unbeispiele: 1) $V = \mathbb{R}^2$; dann ist $g: V \to \mathbb{R}$, $w \mapsto \|w\| = \sqrt{w \cdot w}$

kein Element von V^*. warum?

2) $V = \mathbb{R}^2$; dann ist $h: V \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle \mapsto x \cdot y$

kein Element von V^*. warum?

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ und $v_0 \in V$, dann ist $v_0: V \to \mathbb{R}$, $w \mapsto v_0 \cdot w$ ein Element von V^*.

oder $f: V \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle \mapsto x + y$

Satz: $\dim(V) = \dim(V^*)$