Repetition Tensoren:

- Ein Tensor ist eine multilineare Abbildung

$$T: V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$$

wobei V ein n-dim. reeller Vektorraum ist und V^* der Dualraum von V ist.

- Ist p die Anzahl der Faktoren V^*, so ist T p-fach kontravariant.
- Ist q die Anzahl der Faktoren V, so ist T q-fach kovariant.

- Ist T ein (p,q)-Tensor und $\{b_1, \dots, b_n\}$ und $\{\beta^1, \dots, \beta^n\}$ ein Paar dualer Basen von V bzw. V^*, dann ist T dadurch bestimmt, dass wir

$$T(\beta^{i_1}, \dots, \beta^{i_p}, b_{j_1}, \dots, b_{j_q}) =: T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

kennen, wobei $1 \leq i_k \leq n$ (für $1 \leq k \leq p$) und $1 \leq j_\ell \leq n$ (für $1 \leq \ell \leq q$) ist. D.h. die $i_1, \dots, i_p$ durchlaufen alle möglichen p-Tupel von Zahlen i_k mit $1 \leq i_k \leq n$; analog für $j_1, \dots, j_q$.

- Ein (p,q)-Tensor T ist also bestimmt durch $n^p \cdot n^q = n^{(p+q)}$ Werte (wobei n die Dimension von V ist).

- Zum Beispiel ist für $n=3$, ein $(0,2)$-Tensor bestimmt durch 9 Werte, und ein $(2,3)$-Tensor durch 243 Werte.

- Beispiel: $n=3$, T ein $(2,3)$-Tensor.

Für alle $1 \leq i_1, i_2 \leq 3$ und alle $1 \leq j_1, j_2, j_3 \leq 3$ ist $T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2 j_3}$ eine reelle Zahl. Zum Beispiel

$$T^{12}_{331} = T^{13}_{322} = T^{22}_{121} = 4$$

$$T^{11}_{222} = T^{22}_{333} = -7$$

alle anderen $T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2 j_3}$ seien $=0$.

Weiter sei $w_1^* = (0\ 2\ 9)$, $w_2^* = (3\ {-2}\ {-4})$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Um $T(w_1^*, w_2^*, v_1, v_2, v_3)$ zu berechnen, müssen wir also 243 Produkte addieren; von diesen Produkten sind aber höchstens 5 Produkte $\neq 0$: $w_2^* = 3 \cdot \varepsilon^1 + (-2) \cdot \underline{\underline{\varepsilon^2}}$

$$T^{12}_{331}: \quad 4 \cdot (0 \cdot -2 \cdot 2 \cdot -1 \cdot -2) = 0$$

$w_1^* = 0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon^1}} + \ldots$ $\qquad v_1 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \cdot 2 \cdot \underline{\underline{e_3}}$

$$T^{13}_{322}: \quad 4 \cdot (0 \cdot -4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 0) = 0$$

$$T^{22}_{121}: \quad 4 \cdot (2 \cdot -2 \cdot 0 \cdot 7 \cdot -2) = 0$$

$$T^{11}_{222}: \quad -7 \cdot (0 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 0) = 0$$

$$T^{22}_{333}: \quad -7 \cdot (2 \cdot -2 \cdot 2 \cdot -1 \cdot 8) = -7 \cdot 64$$

Also ist $T(w_1^*, w_2^*, v_1, v_2, v_3) = -448$.

5 DER EUKLIDISCHE RAUM

Ein reeller Vektorraum (also $\mathbb{R}^n$) mit einem (allgemeinen) Skalarprodukt heisst Euklidischer Raum.

5.1 Das skalare Produkt

Sei $V=\mathbb{R}^n$. In V sei eine bilineare Funktion (v,w) gegeben, d.h. $(\cdot,\cdot): V\times V \to \mathbb{R}$, $\langle v, w\rangle \mapsto (v,w)$ welche folgende Eigenschaften besitzt:

- $(\cdot,\cdot)$ ist symmetrisch: $(v,w)=(w,v)$ für alle $v,w\in V$.
- $(\cdot,\cdot)$ ist positiv definit: $(v,v)\geq 0$ für alle $v\in V$ und $(v,v)=0 \Leftrightarrow v=0$.

Die reelle Zahl (v,w) heisst das skalare Produkt der Vektoren v & w; bzw. $(\cdot,\cdot)$ ist ein Skalarprodukt.

Beispiel: Das Standard-Skalarprodukt ist ein skalares Produkt, denn es ist eine bilineare Funktion und besitzt die beiden Eigenschaften symmetrisch und positiv definit.

Weil ein skalares Produkt
$$(\cdot,\cdot): V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle v, w\rangle \longmapsto (v,w)$$
eine bilineare Funktion auf $V\times V$ ist, ist ein skalares Produkt ein spezieller $(0,2)$-Tensor (der Tensor ist speziell, weil er symmetrisch und positiv definit ist).

Beispiel: $V=\mathbb{R}^2$, $\quad T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}$

bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$.

Es gilt also $T(e_1,e_1)=1$, $T(e_2,e_2)=26$,
$T(e_1,e_2)=T(e_2,e_1)=5$.

- Wir zeigen zuerst, dass T symmetrisch ist:

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = \underbrace{1}_{T_{11}}\cdot a\cdot c + \underbrace{5}_{T_{21}}\cdot b\cdot c + \underbrace{5}_{T_{12}}\cdot a\cdot d + \underbrace{26}_{T_{22}}\cdot b\cdot d$$

$$T\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \overbrace{1}\cdot c\cdot a + \overbrace{5}\cdot d\cdot a + \overbrace{5}\cdot c\cdot b + \overbrace{26}\cdot d\cdot b$$

Somit ist $T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$.

- Nun zeigen wir, dass T positiv definit ist:

Sei $v=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $T(v,v) = T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a^2+10ab+26b^2$.

Ist $T(v,v)=0$, so ist auch $T(\lambda v, \lambda v)=0$ für irgend ein $\lambda\in\mathbb{R}$ (weil T bilinear ist). D.h. für $a\neq 0$ und $\lambda=\frac{1}{a}$ ist $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}\right)=0$.

<u>$a=0$:</u> Dann ist $v=\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ und $T(v,v)=26b^2$.
Ist $T(v,v)=0$, so ist $b=0$, also $v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>$a\neq 0$:</u> Sei $\lambda=\frac{1}{a}$, dann ist, für $\tilde{b}=\frac{b}{a}$, $v=\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$.

$T(v,v) = 1+10\tilde{b}+26\tilde{b}^2$, und aus $T(v,v)=0$ folgt $\tilde{b}=\frac{-10\pm\sqrt{-4}}{2}\notin\mathbb{R}$, d.h. $T(v,v)\neq 0$.

Somit gilt: $T(v,v)=0 \Leftrightarrow v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also T pos. definit.

Wir definieren $|v| := \sqrt{(v,v)}$ als die Norm oder die Länge von v bezüglich dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.
Bem: Hier wird gebraucht, dass das Skalarprodukt positiv definit ist!
Das Skalarprodukt (v,w) kann durch $|v|, |w|, |v+w|$ ausgedrückt werden:

$$|v+w|^2 = (v+w, v+w) \overset{\text{bilinear}}{=} (v,v) + 2\cdot(v,w) + (w,w)$$
$$= |v|^2 + |w|^2 + 2\cdot(v,w)$$

also $\quad (v,w) = \frac{1}{2}\cdot\left(|v+w|^2 - |v|^2 - |w|^2\right).$

Beispiel: T derselbe Tensor (bzw. dasselbe Skalarprodukt) wie vorher. Seien $v = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Um $T(v,w)$ zu berechnen, können wir auch

$v^t \cdot \begin{pmatrix}1 & 5\\5 & 26\end{pmatrix} \cdot w$ berechnen, also

$$(0\ 2)\cdot\begin{pmatrix}1 & 5\\5 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = (0\,2)\begin{pmatrix}-4\\21\end{pmatrix} = -42.$$

Weiter ist $|v|^2 = 104$; $|w|^2 = 17$; $|v+w|^2 = 37$;

und $\frac{1}{2}\cdot(37 - 104 - 17) = -42.$

Zwei Vektoren v & w heissen zueinander orthogonal wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, d.h. wenn gilt:

$$(v,w) = 0.$$

Beachte: Der Nullvektor ist zu allen Vektoren orthogonal, und ein Vektor v ist genau dann zu sich selber orthogonal wenn $v = 0$ ist.

Beispiel: Wir betrachten die beiden Vektoren $\binom{1}{0}$ & $\binom{0}{1}$ und die beiden Skalarprodukte

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

T ist aus vorherigem Beispiel ein Skalarprodukt und S ist das Standard-Skalarprodukt.

- Bezüglich S sind $\binom{1}{0}$ & $\binom{0}{1}$ orthogonal, denn $(1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$
- Bezüglich T sind $\binom{1}{0}$ & $\binom{0}{1}$ nicht orthogonal, denn $(1\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.$

Ob zwei Vektoren orthogonal zueinander sind hängt also vom Skalarprodukt ab, nicht aber von der Basis.

Der folgende Satz gibt einen Zusammenhang zwischen linearer Unabhängigkeit von Vektoren und Orthogonalität:

Satz. Paarweise orthogonale, von Null verschiedene, Vektoren sind linear unabhängig.

Beweis: Seien $v_1, \dots, v_n$ paarweise orthogonale Vektoren, d.h. $(v_i, v_j) = 0$ (wobei $v_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$).
$\Leftrightarrow i \neq j$

Ist $r^i v_i = 0$, so folgt $(0, v_j) = (r^i v_i, v_j) = 0$ für jedes $1 \leq j \leq n$. Aus der Linearität von $(\cdot,\cdot)$ gilt dann

$$(r^i v_i, v_j) = r^i (v_i, v_j)$$

und weil $(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$, erhalten wir

$$(r^i v_i, v_j) = r^j (v_j, v_j)$$

wobei $(v_j, v_j) \neq 0$ weil $v_j \neq 0$.

Weil nun $(r^i v_i, v_j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, ist also auch $r^j (v_j, v_j) = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, d.h. $r^j = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, was zu zeigen war. $\dashv$

Um bezüglich eines Skalarprodukts Winkel zwischen Vektoren zu definieren, brauchen wir den folgenden

<u>Satz.</u> Für je zwei Vektoren eines Euklidischen Raumes gilt für jedes Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ die <u>Schwarz'sche Ungleichung</u>:

$$(v,w)^2 \leq |v|^2 \cdot |w|^2$$

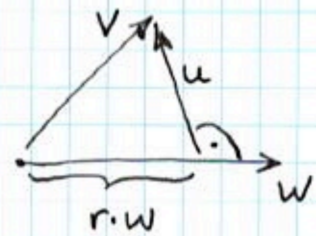
<u>Beweis:</u> Ist $w = 0$, so ist $(v,w) = 0 = |w|$ und die Ungleichung ist richtig.

Wir dürfen also $w \neq 0$ annehmen, und weil ein Skalarprodukt positiv definit ist gilt dann $(w,w) > 0$.

Wir schreiben nun v in der Form

$$v = r \cdot w + u \quad (\text{mit } r \in \mathbb{R},\ u \text{ ein Vektor})$$

und zwar so, dass $r \cdot w$ zum Vektor u orthogonal ist, d.h. wir suchen ein geeignetes $r \in \mathbb{R}$ und den entsprechenden Vektor u:



- Sind v und w lin. abh., so ist $v = r \cdot w$ und wir wählen $u = 0$.

- Sind v und w lin. unabh., so spannen v & w eine Ebene auf. In dieser Ebene finden wir einen Vektor $\tilde{u} \neq 0$ der zu v orthogonal ist. Mit dem vorherigen Satz sind $\tilde{u}$ und v linear unabhängig, d.h. wir können w schreiben als Linearkomb. von $\tilde{u}$ und v, womit wir dann ein $u = \lambda \cdot \tilde{u}$ und ein $r \in \mathbb{R}$ finden mit den gewünschten Eigenschaften.

- Ist $v = r \cdot w + u$ (mit w und u orthogonal), so ist

$$(v,w) = (r \cdot w + u, w) \underset{\text{Linearität}}{=} r \cdot \underbrace{(w,w)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{pos. def.}}} + \underbrace{(u,w)}_{\substack{= 0 \\ \text{orthogonal}}}$$

also $r = \dfrac{(v,w)}{(w,w)}$ und $u = v - r \cdot w$. Weiter gilt

$$|v|^2 = (v,v) = (r \cdot w + u, r \cdot w + u) = r^2 \cdot |w|^2 + \overbrace{|u|^2}^{\geq 0} \geq r^2 \cdot |w|^2 =$$
$$\frac{(v,w)^2}{(w,w)^2} \cdot |w|^2 = \frac{(v,w)^2}{|w|^4} \cdot |w|^2 = \frac{(v,w)^2}{|w|^2}, \text{ also}$$

$$(v,w)^2 \leq |v|^2 \cdot |w|^2. \qquad \top$$