

Lösungen zu Prüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, so streichen Sie es einfach irgendwie durch (bis es kein Kreuzchen mehr ist:-)

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls sie unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Die lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (x + y, y - x)$ von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 wird, bzgl. der Standardbasis, durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt.		×
b) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n(\det A)$ für alle $n \times n$ -Matrizen.	×	
c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ beschreibt eine 45° -Drehung der Ebene.		×
d) Die Projektion auf die x - y -Ebene im \mathbb{R}^3 , also $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, hat Determinante 0 , denn diese Abbildung ist sicher nicht invertierbar.	×	
e) Sei A eine lineare Abbildung und v ein Vektor. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$.		×
f) $(0, 1, 2, 3, \dots, 100)$, $(0, 1, 4, 9, \dots, 100^2)$ und $(0, 1, 8, 27, \dots, 100^3)$ sind drei linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^{101} .	×	
g) Das inhomogene (also $b \neq 0$) Gleichungssystem $Ax = b$ habe mindestens zwei linear unabhängige Lösungen. Dann ist der Kern der Matrix A mindestens 2-dimensional.		×
h) Die Polynome $\{(x + 1)^2, 7x + 7, (x - 1)^2, 3x - 3\}$ in P_2 sind linear unabhängig.		×
Die Polynome $\{(x + 1)^2, 7x + 7, (x - 1)^2, 3x - 3\}$ erzeugen P_2 .	×	
i) Die Polynome $\{(2x + 2)^2, 2x^2 + 2, (x - 1)(x + 1)\}$ im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 sind linear unabhängig.	×	
Die Polynome $\{(2x + 2)^2, 2x^2 + 2, (x - 1)(x + 1)\}$ erzeugen P_2 .	×	
j) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$; es gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\text{im}(A))$.	×	

2. $B = \{1, x, x^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums P_2 aller Polynome vom Grad ≤ 2 .

a) Man beschreibe die lineare Abbildung

$$L : P_2 \rightarrow P_2, \quad p(x) \mapsto p(x) - xp'(x) + p''(x)$$

in der Basis B durch eine Matrix A .

b) Man bestimme eine Eigenbasis E von L und die zugehörige Darstellungsmatrix D .

c) Man bestimme den Lösungsraum U von $Lp(x) = x^2$ in P_2 .

Lösung:

a) Wir rechnen zuerst aus was die Bilder der Basisvektoren unter der Abbildung L sind.

$$L1 = 1 - x \cdot 0 + 0 = 1$$

$$Lx = x - x \cdot 1 + 0 = 0$$

$$Lx^2 = x^2 - x \cdot 2x + 2 = -x^2 + 2$$

Die Darstellungsmatrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Zuerst die Eigenwerte

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-\lambda)(-1 - \lambda) \Rightarrow \lambda = -1, 0, 1$$

Der Matrix A sieht man sofort an, dass $(1, 0, 0)^\top$ ein EV zu EW 1 und $(0, 1, 0)^\top$ ein EV zu EW 0 ist. Es bleibt den Eigenraum E_{-1} zu bestimmen

$$E_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 0 & 2 \\ 0 & -(-1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 - (-1) \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\{(1, 0, -1)^\top\}$$

In der Eigenbasis hat die Darstellungsmatrix Diagonalgestalt mit den Eigenwerten auf der Diagonale, also

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Die Reihenfolge der Eigenwerte darf natürlich auch anders sein.)

Siehe nächstes Blatt!

c) Das Polynom x^2 hat bzgl. der Basis B den Koordinatenvektor $(0, 0, 1)^\top$ und wir müssen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

lösen. Es folgt, dass $c = -1$ und dass $b \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Die oberste Gleichung (1. Komponente) impliziert $a = 2$. Somit ist der Lösungsraum

$$U = \{-x^2 + bx + 2 \mid b \in \mathbb{R}\}$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a + 2b & 2(a - 2b) & a - 2b \\ b & 2a & -b \\ -a & 2(a - 2b) & 3a \end{pmatrix}$$

- a) Der Vektor $(0, -1, 2)^\top$ ist ein Eigenvektor von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- b) Für welche a, b ist A singular? *Hinweis:* berechne $\det(A)$
- c) Sei nun $a = 2b$; man bestimme Matrizen D und T so dass $D = T^{-1}AT$ diagonal ist.

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} a + 2b & 2(a - 2b) & a - 2b \\ b & 2a & -b \\ -a & 2(a - 2b) & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(a - 2b) + 2(a - 2b) \\ -2a - 2b \\ -2(a - 2b) + 6a \end{pmatrix} = (2a + 2b) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert zum Eigenvektor $(0, -1, 2)^\top$ ist also $(2a + 2b)$.

b) Wir subtrahieren von der dritten Zeile von A die erste Zeile und erhalten

$$\begin{pmatrix} a + 2b & 2(a - 2b) & a - 2b \\ b & 2a & -b \\ -2a - 2b & 0 & 2a + 2b \end{pmatrix}$$

Nun addieren wir zur ersten Spalte die dritte Spalte hinzu und bekommen

$$\begin{pmatrix} 2a & 2(a - 2b) & a - 2b \\ 0 & 2a & -b \\ 0 & 0 & 2a + 2b \end{pmatrix}$$

Die eben durchgeführten Zeilen- und Spaltenoperationen verändern die Determinante nicht. Also berechnen wir die Determinante der letzten Matrix und da dies eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det(A) = 8a^2(a + b)$$

A ist somit singular wenn $a = 0$ oder $b = -a$ ist.

c) Es gilt eine Eigenbasis von

$$\begin{pmatrix} 4b & 0 & 0 \\ b & 4b & -b \\ -2b & 0 & 6b \end{pmatrix}$$

zu finden. Zuerst die Eigenwerte: z.B. mit der Regel von Sarrus folgt

$$0 = \det \begin{pmatrix} 4b - \lambda & 0 & 0 \\ b & 4b - \lambda & -b \\ -2b & 0 & 6b - \lambda \end{pmatrix} = (4b - \lambda)(4b - \lambda)(6b - \lambda) \Rightarrow \lambda = 4b, 6b$$

Nun die Eigenräume (unter der Annahme $b \neq 0$):

$$E_{4b} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -b \\ -2b & 0 & 2b \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{6b} = \ker \begin{pmatrix} -2b & 0 & 0 \\ b & -2b & -b \\ -2b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{siehe auch Aufgabenteil a)}$$

(Falls $b = 0$ so gibt es natürlich nur einen Eigenraum $E_0 = \mathbb{R}^3$)

Alles in allem erhalten wir also

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 4b & 0 & 0 \\ 0 & 4b & 0 \\ 0 & 0 & 6b \end{pmatrix}$$

4. Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = 15x_1^2 - 20x_1x_2 + 15x_2^2 + x_3^2 \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.
- Eine Quadrik Q ist gegeben durch $q(x) = 50$. Bringen Sie die Quadrik Q durch eine Hauptachsentransformation auf Normalform.
- Ist die quadratische Form q positiv definit, negativ definit oder indefinit? Und welche Punkte x im \mathbb{R}^3 erfüllen die Gleichung $q(x) = 0$? Begründen Sie!

Lösung:

- a) Die gesuchte Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Da die Matrix A symmetrisch ist, existiert eine ONB aus Eigenvektoren. Ein Eigenvektor-Eigenwert-Paar lässt sich sofort ablesen: $(0, 0, 1)^\top$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Die verbleibenden zwei Eigenvektoren stehen senkrecht auf diesem; deren dritte Komponenten muss also 0 sein. Wir finden die Eigenvektoren $(1, -1, 0)$ zum EW 25 und $(1, 1, 0)$ zum EW 5. Eine ONB bzw. die dazugehörige orthogonale Transformationsmatrix ist

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und mit $x = Ty$ erhalten wir

$$q(y) = y^\top T^\top ATy = y^\top \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = 25y_1^2 + 5y_2^2 + y_3^2 = 50$$

die Normalform von q bzw. Q .

- c) Die quadratische Form q ist positiv definit. Dies folgt entweder aus einem Satz aus der Vorlesung welcher besagt: q positiv definit \Leftrightarrow alle Eigenwerte von A sind positiv. Oder direkt aus der Definition: q positiv definit $\Leftrightarrow q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ was äquivalent zu $q(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$ ist – und $q(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$ kann man an der Normalform ablesen.

Da q also positiv definit ist gilt $q(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ und es bleibt als einzige Lösung von $q(x) = 0$ nur der Nullvektor $x = (0, 0, 0)^\top$.

Siehe nächstes Blatt!

5. Gegeben sei die Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

im Vektorraum \mathbb{R}^3 .

- Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis B an, um eine Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten.
- Sei $O = \{e_1, e_2, e_3\}$ die ONB aus Aufgabenteil a). Finden Sie die Transformationsmatrix welche Koordinaten bzgl. der Standardbasis von \mathbb{R}^3 in Koordinaten bzgl. der Basis O umwandelt.
- Finden Sie eine Matrix A mit $\text{im}(A) = \text{span}\{e_3\}$ und $\text{ker}(A) = \text{span}\{e_1, e_2\}$.

Lösung:

- Wir bezeichnen die Basisvektoren mit $\{b_1, b_2, b_3\}$. Den ersten Vektor brauchen wir nur zu normieren und erhalten mit

$$\|(2, 1, 2)^\top\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

den ersten Vektor der ONB $e_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$. Den zweiten ONB-Vektor erhalten wir nach dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren durch

$$b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1 = b_2 - (-1)e_1 = (8/3, -2/3, -7/3)^\top$$

und danach normieren ($\|(8/3, -2/3, -7/3)^\top\| = \sqrt{13}$), also $e_2 = (1/3\sqrt{13})(8, -2, -7)$. Den dritten Vektor brauchen wir wiederum nur zu normieren, da $\langle b_3, e_1 \rangle = \langle b_3, e_2 \rangle = 0$ und bekommen $e_3 = (1/3\sqrt{13})(1, -10, 4)$. Die ONB ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8/(3\sqrt{13}) \\ -2/(3\sqrt{13}) \\ -7/(3\sqrt{13}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/(3\sqrt{13}) \\ -10/(3\sqrt{13}) \\ 4/(3\sqrt{13}) \end{pmatrix} \right\}$$

- Die in a) gefundene ONB, in einer Matrix aufgereiht, ergibt die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 8/(3\sqrt{13}) & 1/(3\sqrt{13}) \\ 1/3 & -2/(3\sqrt{13}) & -10/(3\sqrt{13}) \\ 2/3 & -7/(3\sqrt{13}) & 4/(3\sqrt{13}) \end{pmatrix}$$

welche Koordinaten bzgl. der Basis O in Koordinaten bzgl. der Standardbasis umwandelt. Wir suchen aber die Inverse dieser Transformation, also die Inverse von T . Da T eine orthogonale Matrix ist, brauchen wir sie nur zu transponieren:

$$T^{-1} = T^\top = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 8/(3\sqrt{13}) & -2/(3\sqrt{13}) & -7/(3\sqrt{13}) \\ 1/(3\sqrt{13}) & -10/(3\sqrt{13}) & 4/(3\sqrt{13}) \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

- c) Ein Möglichkeit für so eine Matrix A ist die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\text{span}\{e_3\}$. Diese ist gegeben durch

$$x \mapsto \langle x, e_3 \rangle e_3 = e_3 e_3^\top x \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Es lässt sich leicht durch einsetzen der ONB-Vektoren prüfen, dass $\text{im}(A) = \text{span}\{e_3\}$ und $\text{ker}(A) = \text{span}\{e_1, e_2\}$. Hier bezeichnet A nun die Matrix $e_3 e_3^\top$ was ausgerechnet

$$A = \begin{pmatrix} 1/117 & -10/117 & 4/117 \\ -10/117 & 100/117 & -40/117 \\ 4/117 & -40/117 & 16/117 \end{pmatrix}$$

ergibt.