

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls sie unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Der Vektorraum $C(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist unendlich dimensional (da er alle Polynome enthält).		
b) Sei A eine $n \times n$ -Matrix, in welcher jeder Eintrag entweder 0 oder 1 ist. Dann ist A orthogonal genau dann wenn sie eine Permutationsmatrix ist.		
c) Sei $e_1 = (1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$. Gilt für eine 3×3 -Matrix A , dass e_1, Ae_1, A^2e_1 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden, dann ist A invertierbar.		
d) Alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{-8}^1 f(t) dt = 0$ bilden einen Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$.		
Alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{-8}^1 f(t) dt = 1$ bilden einen Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$.		
e) Seien A_1, A_2, A_3 drei linear unabhängige Matrizen im Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen. Dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $A_1v + A_2v + A_3v \neq 0$.		
f) Die Menge der $n \times n$ -Matrizen, so dass die Summe der Einträge der ersten Spalte gleich der Summe der Einträge der ersten Zeile ist, bildet <u>keinen</u> Untervektorraum des Vektorraums der $n \times n$ -Matrizen.		
g) Die Polynome $p(x) = ax + b, q(x) = cx + d$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie dieselben Nullstellen haben oder wenn mindestens eines das Nullpolynom ist.		
h) Für eine quadratische Matrix A gilt $\text{Rang}(A^n) \geq \text{Rang}(A^{n+1})$ für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$		
i) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von \mathbb{R}^3 gibt es eine Matrix A mit $\text{im}(A) = U = \text{ker}(A)$.		
j) $AB = \mathbb{I}$ impliziert auch $BA = \mathbb{I}$ für quadratische Matrizen A und B .		
$AB = 0$ impliziert auch $BA = 0$ für quadratische Matrizen A und B .		

A

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5a \\ 3+2b & 1 & 2-3a \\ -3-2b & 2 & -2+3a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

- a) [2 Punkte] Welche Bedingungen müssen a, b erfüllen, damit die Matrix A singulär wird?
- b) [3 Punkte] Finden Sie eine Basis für das Bild von A (in Abhängigkeit der Parameter a, b).
- c) [1 Punkt] Für welche Werte von a und b ist A symmetrisch?
- d) [4 Punkte] Sei A nun die symmetrische Matrix aus c) (also mit den in c) gefundenen Werten eingesetzt). Bestimmen Sie, für welche Werte $n = 0, 1, 2, \dots$ die Matrix A^n positiv definit ist.

3. [10 Punkte] Seien

$$v_1 = (1, 1, 1)^\top, \quad v_2 = (1, 2, 3)^\top, \quad v_3 = (1, 4, 9)^\top.$$

- a) [5 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf v_1, v_2, v_3 an (in dieser Reihenfolge), um eine Orthonormalbasis zu erhalten.
- b) [3 Punkte] Was sind die Koordinaten von $w = (\sqrt{3} + \sqrt{6}, \sqrt{6} - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{6})^\top$ bezüglich der in a) erhaltenen Basis?
- c) [2 Punkte] Berechnen Sie die (euklidische) Norm von w und geben Sie das Resultat in wurzelfreier Form an.

4. [10 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) &= -2y(t) + z(t) \\ z'(t) &= -6y(t) + 3z(t). \end{aligned}$$

- a) [2 Punkte] Verwandeln Sie dies in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
- b) [5 Punkte] Geben Sie die allgemeine Lösung des in a) gefundenen Systems an.
- c) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Lösung zu den Bedingungen $y'(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 5$.

5. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2)^\top.$$

- a) [1 Punkt] Finden Sie eine symmetrische Matrix A , so dass $q(x) = x^\top Ax$ gilt.
- b) [5 Punkte] Führen Sie die Hauptachsentransformation $y = Tx$ durch und geben Sie die Normalform von q an.
- c) [4 Punkte] Welche Punkte auf dem Kegelschnitt $\{x \mid q(x) = 1\}$ sind dem Nullpunkt am nächsten?

Hinweis: Beantworten Sie diese Frage zuerst im y -Koordinatensystem der Hauptachsen.