

Lineare Algebra (D-MAVT)

Musterlösung zur Basisprüfung Frühling 2006

verfasst von Lucia Keller

Aufgabe 1

LR-Zerlegung mit dem Gaussverfahren berechnen:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 9 \\ -2 & -11 & 3-6a & -6+5a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & \mathbf{5} & -1 & 5 \\ \boxed{3} & 5 & 2 & 3 \\ \boxed{-1} & -10 & 2-6a & -4+5a \end{pmatrix} \\
 & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & \mathbf{3} & -2 \\ \boxed{-1} & \boxed{-2} & -6a & 6+5a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 3 & -2 \\ \boxed{-1} & \boxed{-2} & \boxed{-2a} & 6+a \end{pmatrix} \\
 & \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2a & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6+a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Matrix A besitzt eine Inverse, falls $\det(A) \neq 0$:

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L) \det(R) = 1 \cdot 30(6+a) = 180 + 30a \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a = -6$$

\Rightarrow für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ besitzt A eine Inverse.

Aufgabe 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \varphi_1(x) = x^2, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = 1$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \varphi_1(-1) & \varphi_2(-1) & \varphi_3(-1) \\ \varphi_1(0) & \varphi_2(0) & \varphi_3(0) \\ \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Normalgleichungen $A^T A x = A^T f$ minimieren die Summe der Fehlequadrate in y -Richtung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{18} & 8 & 6 & 19 \\ 8 & 6 & 2 & 11 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 19 \\ 0 & \mathbf{22} & -6 & 23 \\ 0 & -2 & 6 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 8 & 6 & 19 \\ 0 & 22 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 60 & 78 \end{array} \right) \Rightarrow c = \frac{13}{10}, b = \frac{7}{5}, \\
 & a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{7}{5}x + \frac{13}{10}}}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

Standardbasis: $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abbildung der Basisvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Abbildungsmatrix } A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

b)

Koordinatentransformation von e'_1, e'_2, e'_3 nach e_1, e_2, e_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Transformationsmatrix } T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B = T^{-1}AT$ ist die Spiegelung an der (x, y) -Ebene in den neuen Koordinaten.

Damit wir die Inverse nicht berechnen müssen, formen wir $B = T^{-1}AT$ um in $TB = AT$, d.h. $(Tb^{(1)} \quad Tb^{(2)} \quad Tb^{(3)}) = AT$ mit den drei Spaltenvektoren $b^{(1)}, b^{(2)}$ und $b^{(3)}$ von B . Dieses Gleichungssystem lösen wir spaltenweise mit dem Gaußverfahren.

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Tb^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Tb^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Tb^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow b^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Abbildungsmatrix bzgl. } e_1, e_2, e_3: \quad B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Bemerkung: Weil e_1 und e_2 in der (x, y) -Ebene liegen, ist es klar, dass $A = B$ gelten muss, denn e_1 und e_2 bleiben so bei der Spiegelung unverändert. In z -Richtung ist $e_1 = e'_1$.

Aufgabe 4

a)

A:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 1)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

\Rightarrow Eigenwert $\lambda_1 = 1$

Eigenraum zu λ_1 : $(A - \lambda_1 I_2)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = s, x_1 = 2s \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Es gibt keine Eigenbasis zur Matrix A .

\Rightarrow Wir finden kein T , so dass $T^{-1}AT$ diagonal ist.

\Rightarrow A ist nicht diagonalisierbar.

B:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 - \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(5 - \lambda) - 1] + 2[-2(1 - \lambda)] \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 4) + 2(-2 + 2\lambda) \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 4 - \lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda - 4 + 4\lambda = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = -\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 1) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Eigenwerte $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 1$

Zu drei verschiedenen Eigenwerten gibt es drei linear unabhängige Eigenvektoren, also existiert eine **Eigenbasis** (d.h. B ist diagonalisierbar):

Eigenvektor zu λ_1 : $(B - \lambda_1 I_3)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow x_3 = r, x_2 = r, x_1 = -2r$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu λ_2 : $(B - \lambda_2 I_3)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow x_3 = s, x_2 = -\frac{1}{5}s, x_1 = \frac{2}{5}s$

$$\Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu λ_3 : $(B - \lambda_3 I_3)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & -1 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_3 = 0, x_2 = t, x_1 = \frac{1}{2}t$$

$$\Rightarrow \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{-1}BT$$

C:

$$\det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 \\ = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$$

Also existiert wieder eine Eigenbasis:

Eigenvektor zu λ_1 : $(C - \lambda_1 I_2)x = 0$

$$\left(\begin{array}{cc} -\mathbf{3} & -2 \\ -3 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_2 = s, x_1 = -\frac{2}{3}s \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu λ_2 : $(C - \lambda_2 I_2)x = 0$

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{2} & -2 \\ -3 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_2 = t, x_1 = t \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1}CT$$

b)

B: Weil B symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Transformationsmatrix T :

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \end{pmatrix}$$

C: Wir müssen überprüfen, ob $T^T T = I_2$ gilt mit $T = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T$ ist nicht orthogonal.

Aufgabe 5

Es soll gelten:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -27 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Durch die untersten drei Zeilen sind x_1, x_2, x_3 eindeutig bestimmt:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -27 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & -54 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & -54 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{x_3 = 2, x_2 = -4, x_1 = -3}$$

$$\Rightarrow \underline{t} = -3 \cdot 3 + (-4) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = \underline{5}$$

Aufgabe 6

a)

Eigenwerte von A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 4 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)[-\lambda(3 - \lambda) + 2] - 2[(3 - \lambda) - 2] + 4[1 - \lambda] \\ &= (-1 - \lambda)(-3\lambda + \lambda^2 + 2) - 2(1 - \lambda) + 4 - 4\lambda \\ &= 3\lambda - \lambda^2 - 2 + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda - 2 + 2\lambda + 4 - 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\ &= -\lambda(\lambda - 1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1}$$

Eigenraum zu λ_1 : $(A - \lambda_1 I_3)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_3 = r, x_2 = \frac{1}{2}r, x_1 = -\frac{1}{2}r \Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \underline{v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Eigenraum zu λ_2 : $(A - \lambda_2 I_3)x = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_3 = t, x_2 = s, x_1 = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \Rightarrow E_{\lambda_2} = \left\{ s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \underline{v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}},$$

$$\underline{v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2 und c_3 bestimmen:

$$\left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow c_3 = -3, c_2 = 4, c_1 = -3$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -3, x_2(t) = 4e^t, x_3(t) = 4e^t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = Tx(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 + 8e^t \\ -6 + 8e^t \end{pmatrix}}}$$

b)

Für $c_1, c_3 \neq 0$ gilt

$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) = c_1, \lim_{t \rightarrow -\infty} x_2(t) = 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} x_3(t) = 0$. Also muss man c_1 Null setzen und c_2 und c_3 dürfen beliebig gewählt werden. Dann gilt auch $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$.

$$\Rightarrow x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \underline{\underline{y(0) = Tx(0) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\alpha \\ 2\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}}$$