

# Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Name	
Vorname	
Leginummer	

1	2	3	4	5	Punkte	Kontrolle	Note

**Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt und gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:**

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer oben ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie keinen Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

**Beachten Sie während der Prüfung:**

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

**Viel Erfolg!**



1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen  $\times$  erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind,  $-1$  falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und  $0$  falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf  $0$  auf.

	wahr	falsch
a) Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ .		
b) Für jede positive ganze Zahl $n$ besitzt jeder $n$ -dimensionale Vektorraum Unterräume der Dimensionen $1, 2, \dots, n$ .		
c) Es gibt ein Polynom zweiten Grades, dessen Graph durch die Punkte $(0, 0), (1, 1), (2, -2)$ und $(3, 0)$ geht.		
d) Im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der Polynome vom Grad $\leq 2$ mit dem Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ sind die Vektoren $\left\{ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \right\}$ orthogonale Einheitsvektoren.		
e) Es gibt eine Matrix $A$ mit charakteristischem Polynom $P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$ , welche invertierbar ist.		
f) Sei $v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $2$ für die Matrizen $A$ und $B$ . Dann ist $v$ auch ein Eigenvektor zum Eigenwert $2$ für die Matrix $A + B$ .		
Sei $v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $2$ für die Matrizen $A$ und $B$ . Dann ist $v$ auch ein Eigenvektor zum Eigenwert $2$ für die Matrix $AB$ .		
g) Eine Matrix $A$ mit $A^5 = 0$ ist singulär.		
h) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.		
i) Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im $\mathbb{R}^3$ . Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ linear unabhängig.		
Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren $\{v_1, v_2\}$ im $\mathbb{R}^3$ . Dann sind auch die Vektoren $\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$ linear unabhängig.		
j) Die Menge der $5 \times 5$ -Matrizen $A$ , welche $\dim(\text{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		
Die Menge der $6 \times 6$ -Matrizen $A$ , welche $\dim(\text{im}(A)) = \dim(\ker(A))$ erfüllen, bilden einen Vektorraum.		

2. [10 Punkte] Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung  $\dot{y} = Ay$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) [7 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Bedingungen

$$y_2(0) = 0, \quad y_3(t) \rightarrow 2 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

3. [10 Punkte] Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 + \alpha & -1 - \alpha \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 + 4\alpha & 5 + \alpha \end{pmatrix},$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  beliebig ist.

- a) [6 Punkte] Berechnen Sie den Kern und das Bild von  $A$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ . Geben Sie auch die jeweiligen Dimensionen an.
- b) [1 Punkt] Für welche Werte von  $\alpha$  ist  $A$  invertierbar?
- c) [3 Punkte] Lösen Sie Teilaufgabe a) für die Matrix  $A^{10}$ !

4. [10 Punkte] Sei  $\mathcal{P}_2$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq 2$  mit der Basis  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ . Sei weiter

$$F : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad p(x) \mapsto (x^2 - 3)p''(x) + p'(x) - 3p(0)$$

eine lineare Abbildung.

- a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$ .
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von  $F$ .
- c) [4 Punkte] Berechnen Sie  $F^n(p(x))$  für  $p(x) = 2 + 7x + x^2$  und  $n \geq 1$ .

5. [10 Punkte] Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- a) [3 Punkte] Überprüfen Sie, dass durch  $\langle x, y \rangle_A := x^T A y$  ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  definiert ist.
- b) [3 Punkte] Konstruieren Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus  $\{a^{(1)}, a^{(2)}\}$  eine orthonormale Basis  $\{b^{(1)}, b^{(2)}\}$  bezüglich des Skalarproduktes aus a).
- c) [2 Punkte] Bestimmen Sie alle Vektoren  $w$ , welche orthogonal zu  $v$  sind bezüglich des Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .
- d) [2 Punkte] Sei  $\{c^{(1)}, c^{(2)}\}$  eine bezüglich des Standardskalarproduktes von  $\mathbb{R}^2$  orthonormale Eigenbasis von  $A$ . Überprüfen Sie, dass dann auch  $\langle c^{(1)}, c^{(2)} \rangle_A = 0$  gilt.