

Lösungen zu Prüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

WICHTIG: Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.*

	wahr	falsch
a) Ein Gleichungssystem $Ax = Ab$ für x (A und b gegeben) hat immer genau eine Lösung ($x = b$).		×
b) Einer Matrix die Summe ihrer Einträge zuzuordnen, ist eine lineare Abbildung.	×	
c) $A \mapsto A^T$ ist eine lineare Abbildung und die symmetrischen Matrizen bilden einen Eigenraum davon.	×	
d) Im \mathbb{R}^3 gibt es 4 Vektoren, so dass beliebige 3 davon (es gibt 4 solche Grüppchen) linear unabhängig sind.	×	
e) Sei $e_1 = (1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$. Gilt für eine 3×3 -Matrix, dass Ae_1, A^2e_1, A^3e_1 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden, dann ist A invertierbar.	×	
f) Die Polynome $p_1(x) = 1 + (1 + 7x) + (1 - 49x)^2$, $p_2(x) = (1 + 7x) + (1 - 49x)^2$, $p_3(x) = (1 - 49x)^2$ sind linear abhängig.		×
g) Es gibt eine Basis $\{u, v\}$ des Vektorraums \mathbb{R}^2 mit $\ u\ = \ v\ = 1$ und $\langle u, v \rangle = 1$.		×
h) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum U von \mathbb{R}^4 gibt es eine Matrix A mit $\text{im}(A) = U = \ker(A)$.	×	
i) Ordnet man zwei 2×2 -Matrizen A, B auf folgende Weise in einer 4×4 -Matrix C an: $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $\text{Rang}(C) = \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B)$.		×
j) Multipliziert man eine $m \times n$ -Matrix mit einer $n \times p$ -Matrix mit der üblichen Formel, so benötigt man – wenn man keine Vereinfachungen vornimmt – genau mnp viele Multiplikationen und $m(n-1)p$ viele Additionen.	×	

* verschiedene Serien A, B, C, D

Bitte wenden!

2. Von der 3×3 -Matrix A seien folgende Eigenvektoren (EV) und Eigenwerte (EW) bekannt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 0, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } -3, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } 3.$$

- a) [1 Punkte] Ist A diagonalisierbar?
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie A .
- c) [2 Punkte] Finden Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{y} = Ay$.
- d) [3 Punkte] Für welche Anfangswerte $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$ gilt $y(t) \rightarrow (1, 2, 3)^\top$ wenn $t \rightarrow \infty$?

Lösung:

- a) Ja; denn eine Matrix A ist diagonalisierbar, genau dann wenn es eine Eigenbasis (eine Basis aus Eigenvektoren von A) gibt und die in der Aufgabenstellung gegebenen 3 Eigenvektoren, bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 (z.B. weil Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten immer linear unabhängig sind).
- b) Statt A zu diagonalisieren, müssen wir hier das Umgekehrte tun. Also statt die EV und EW zu bestimmen, diese dann in Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{oder auch jede andere Reihenfolge})$$

anzuordnen und zu folgern, dass dann $A = TDT^{-1}$ gilt, müssen wir nur TDT^{-1} ausrechnen. Zuerst invertieren wir T mit dem Gauss-Jordan Algorithmus:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \quad (\text{die rechte Seite ist gleich } T^{-1}). \end{aligned}$$

Damit können wir nun A ausrechnen:

$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Auch wenn man eine andere Reihenfolge für T (und D entsprechend) wählt, so ist das Resultat für A doch immer dasselbe.

Siehe nächstes Blatt!

c) Da wir die EW und EV bereits kennen, können wir die allgemeine Lösung direkt hinschreiben:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Für $t \rightarrow \infty$ sehen wir folgendes Verhalten von y :

$$\underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{ist konstant}} + \underbrace{c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{geht gegen Null}} + \underbrace{c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{wird sehr gross}}.$$

Also muss, damit $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$ überhaupt konvergiert, $c_3 = 0$ sein und wir erhalten

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

also $c_1 = 1$ und $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig. Mit diesen Bedingungen an c_1, c_2 und c_3 erhalten wir als Menge der Anfangswerte (so dass $y(t) \rightarrow (1, 2, 3)^\top$ wenn $t \rightarrow \infty$)

$$\left\{ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Sei \mathcal{P}_4 der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 4 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Die folgende lineare Abbildung ist gegeben:

$$L: \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^1 p(x) dx.$$

- a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass L eine lineare Abbildung ist. Welche Dimension hat der Kern?
- b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis \mathcal{B} .
- c) [3 Punkte] Sei nun auf \mathcal{P}_4 folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x) dx.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum $\text{span}\{1, 3x^4\}$.

Lösung:

- a) Wir müssen die beiden Bedingungen (i) $L(\lambda p) = \lambda L(p)$ und (ii) $L(p + q) = L(p) + L(q)$ für beliebige Polynome $p, q \in \mathcal{P}_4$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ zeigen (oder alternativ auch die zusammengefasste Bedingung $L(\lambda p + q) = \lambda L(p) + L(q)$):

$$(i) \quad L(\lambda p) = \int_0^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_0^1 p(x) dx = \lambda L(p)$$

$$(ii) \quad L(p + q) = \int_0^1 [p(x) + q(x)] dx = \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx = L(p) + L(q)$$

Die Dimension des Kerns können wir mit der Formel

$$\dim(\text{Bild}(L)) + \dim(\text{Kern}(L)) = \dim(\mathcal{P}_4) = 5$$

berechnen. Da das Bild nicht nur $\{0\}$ ist (z.B. wird ja 1 auf 1 abgebildet) muss es ganz \mathbb{R} , also 1-dimensional, sein; damit folgt $\dim(\text{Kern}(L)) = 4$.

- b) Die Darstellungsmatrix, nennen wir sie D , ist eine 1×5 -Matrix; da die Abbildung von \mathcal{P}_4 , einem 5-dimensionalen Vektorraum, nach \mathbb{R} , einem 1-dimensionalen Vektorraum, geht. Fasst man hingegen die Zahlen $L(p)$ als konstante Polynome auf und L somit als eine Abbildung $L: \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathcal{P}_4$ (oder auch andere passende Zielräume), so ist dies auch richtig und D dann eine 5×5 -Matrix (bzw. die Anzahl Zeilen gleich der Dimension des Zielraumes).

In den Spalten von D (wobei jede Spalte nur eine reelle Zahl enthält) stehen die Bilder der Basisvektoren. In der ersten Spalte steht also $L(1) = \int_0^1 1 dx = 1$, in der zweiten $L(x) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}x^2|_0^1 = \frac{1}{2}$ oder allgemein in der n -ten Spalte

$$L(x^{n-1}) = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}x^n \Big|_0^1 = \frac{1}{n}.$$

Dies, in der Darstellungsmatrix angeordnet, ergibt $D = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

- c) Gegeben sind die beiden unabhängigen Vektoren $w_1(x) := 1, w_2(x) := 3x^4$. Wir wenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an und müssen zuerst w_1 normieren.

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = 1$$

w_1 ist also schon normiert und somit $v_1 := w_1 = 1$ der erste Vektor unserer Orthonormalbasis (ONB). Nach dem Gram-Schmidtschen Verfahren, errechnet sich (die noch nicht normierte Version) des zweiten ONB-Vektors v'_2 durch $w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle v_1$. In unserem Fall also

$$v'_2 = 3x^4 - \langle 1, 3x^4 \rangle \cdot 1 = 3x^4 - \int_0^1 3x^4 \, dx = 3x^4 - \frac{3}{5}$$

Diesen gilt es jetzt noch zu normieren.

$$\begin{aligned} \langle v'_2, v'_2 \rangle &= \int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5} \right)^2 \, dx = \int_0^1 9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25} \, dx = 1 - \frac{18}{25} + \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \Rightarrow \quad \|v'_2\| &= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|} = \frac{5}{4}v'_2 = \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Die gesuchte ONB ist also

$$\left\{ 1, \frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4} \right\}.$$

(Hat man die Vektoren in der umgekehrten Reihenfolge abgearbeitet, so erhält man

$$\left\{ 3x^4, \frac{5}{4} - \frac{9}{4}x^4 \right\},$$

was natürlich auch richtig ist.)

4. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) **[5 Punkte]** Diagonalisieren Sie A ; also geben Sie eine diagonale Matrix D und eine orthogonale Matrix T an, so dass $A = TDT^T$.
- b) **[2 Punkte]** Die Matrix B hat dieselben Eigenvektoren wie A ; diagonalisieren Sie auch B .
- c) **[3 Punkte]** Berechnen Sie das Produkt $ABAABBAAABBB$.

Lösung:

- a) Wir berechnen zuerst die Eigenwerte (EW) von A . Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (4 - \lambda)(1 - \lambda)(4 - \lambda) - 2 - 2 - 4(1 - \lambda) - (4 - \lambda) - (4 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 9\lambda - 18) \end{aligned}$$

Als Nullstellen erhalten wir $\lambda_1 = 0$ und die quadratische Gleichung $-\lambda^2 + 9\lambda - 18 = 0$ liefert $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Die geometrische Vielfachheit der Eigenräume ist also jeweils 1, da ihre Summe höchstens 3 sein kann und jeder Eigenraum mindestens Dimension 1 hat. Wir bestimmen nun die Eigenvektoren (EV) indem wir $\ker(A - \lambda_n \mathbb{I})$ errechnen.

EV zum EW $\lambda_1 = 0$: zu lösen ist

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der zweiten und dritten Zeile (die erste ist abhängig von der dritten) erhalten wir $x_2 = -2x_3$, $x_1 = -x_2 - x_3$. Wählen wir $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig, so folgt $x_2 = -2x_3$ und $x_1 = x_3$. Somit ist $E_0 = \text{span}\{(1, -2, 1)^T\}$.

EV zum EW $\lambda_2 = 3$: zu lösen ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite (oder dritte) Gleichung ergibt $x_2 = x_3$ und die erste $x_1 = -x_2 + 2x_3$. Wählen wir wieder $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig, so folgt, neben $x_2 = x_3$ auch $x_1 = x_3$. Somit ist $E_3 = \text{span}\{(1, 1, 1)^T\}$.

EV zum EW $\lambda_3 = 6$: zu lösen ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siehe nächstes Blatt!

Nach der ersten (oder dritten) Gleichung rechts also $x_2 = 0$ und dann nach der zweiten Gleichung $x_3 = -x_1$. Somit $E_6 = \text{span}\{(1, 0, -1)^\top\}$.

Nun ordnen wir wie üblich die EV in in einer Matrix \tilde{T} und die EV in der Diagonalmatrix D an.

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Spaltenvektoren von \tilde{T} stehen zwar senkrecht zueinander – denn Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix sind immer orthogonal – sind aber noch nicht normiert. Durch normieren der Spalten erhalten wir das gesuchte

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und es gilt $A = TDT^\top$

- b) Da wir bereits wissen, dass B die Eigenvektoren $(1, -2, 1)^\top$, $(1, 1, 1)^\top$, $(1, 0, -1)^\top$ hat, müssen wir diese nur mit B multiplizieren,

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und können ablesen: $E_1 = \text{span}\{(1, -2, 1)^\top\}$, $E_0 = \text{span}\{(1, 1, 1)^\top\}$, $E_{\frac{1}{3}} = \text{span}\{(1, 0, -1)^\top\}$.

Damit haben wir $B = TCT^\top$ für

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{dasselbe } T \text{ wie für } A).$$

- c) Mit $A = TDT^\top$, $B = TCT^\top$ erhalten wir

$$ABAABBAAABBB = TDCDDCCDDCCCT^\top \quad (*)$$

denn die Faktoren $T^\top T = \mathbb{I}$, welche zwischen den D 's und C 's auftreten, lassen sich kürzen. Diagonale Matrizen lassen sich einfach multiplizieren,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tilde{a} & 0 & 0 \\ 0 & b\tilde{b} & 0 \\ 0 & 0 & c\tilde{c} \end{pmatrix},$$

und somit erhalten wir

$$DCDDCCDDCC = \begin{pmatrix} 0^6 \cdot 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & 3^6 \cdot 0^6 & 0 \\ 0 & 0 & 6^6 \cdot (\frac{1}{3})^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Zusammen mit der Gleichung (*) folgt

$$\begin{aligned}
 ABAABBAABBB &= T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 \end{pmatrix} T^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2^6}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2^6}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 32 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 \\ -32 & 0 & 32 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = -8x_1^2 + 12x_1x_3 + x_2^2 + 8x_3^2, \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2, x_3)^\top.$$

- a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.
- b) [6 Punkte] Eine Quadrik Q ist gegeben durch $q(x) = 1$. Bringen Sie die Quadrik durch eine Hauptachsentransformation $y = Tx$ auf Normalform (und geben Sie dabei auch T explizit an).
- c) [3 Punkte] Bestimmen Sie, welche der Hauptachsen die Menge $\{x \mid q(x) = 1\}$ nicht schneidet (und begründen Sie).

Lösung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Wir müssen A diagonalisieren (zum Vorgehen siehe Lösung Aufgabe 4a)).

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} -8 - \lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 6 & 0 & 8 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-8 - \lambda)(1 - \lambda)(8 - \lambda) - 6(1 - \lambda) \cdot 6 \\ &= (1 - \lambda)[(-8 - \lambda)(8 - \lambda) - 36] \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 100) \end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind die gesuchten Eigenwerte (EW) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = -10$. Die entsprechenden Eigenräume/Eigenvektoren sind;

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{span}\{(0, 1, 0)^\top\}, \\ E_{10} &= \text{span}\{(1, 0, 3)^\top\}, \\ E_{-10} &= \text{span}\{(3, 0, -1)^\top\}. \end{aligned}$$

Nun ordnen wir alles in den Matrizen T^\top, D an (wobei wir für T^\top die Spalten nur noch zu normieren brauchen) und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T^\top = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

(Wir haben hier die Eigenvektoren einfach darum liegend in T angeordnet, damit unser T dann auch gleich dem T aus der Aufgabenstellung ist (welches $y = Tx$ erfüllt). Selbstverständlich darf man die Eigenvektoren auch stehend in T anordnen und es gilt $Ty = x$; man arbeitet dann also mit der Inversen Transformation.)

Weiter: Es gilt $D = TAT^\top$ und als Normalform von q bekommen wir

$$1 = q(x) = q(T^\top y) = (T^\top y)^\top A (T^\top y) = y^\top TAT^\top y = y^\top Dy = y_1^2 + 10y_2^2 - 10y_3^2$$

(was man aber auch direkt hinschreiben darf, da sich die Normalform sofort aus den Eigenwerten ablesen lässt).

Bitte wenden!

- c) Die Hauptachse zum negativen Eigenwert schneidet $\{x \mid q(x) = 1\}$ nicht (die anderen beiden schon). Beweis: Die Achse zum EW -10 ist der Eigenraum E_{-10} . Für jeden Vektor v auf dieser Achse gilt natürlich $Av = -10v$ und somit

$$q(v) = v^\top Av = v^\top (-10v) = -10v^\top v = -10\|v\|^2 \leq 0.$$

Insbesondere ist $q(v)$ nie gleich 1 und die Achse schneidet $\{x \mid q(x) = 1\}$ nicht.