

Basisprüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Die Prüfung dauert **120 Minuten**.

Die Multiple Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie **1 Punkt**, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie **0 Punkte**.

Die Handaufgaben 21 bis 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + ay &= 1 \\ a^2x + a^3y &= 0\end{aligned}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Welche Aussage trifft zu?

- (a) Für $a = 2$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.
- (b) Für $a = 1$ hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.
- (c) Für $a = 0$ hat das Gleichungssystem keine Lösung.
- (d) Für $a = -1$ hat das Gleichungssystem genau eine Lösung.

Bitte wenden!

2. Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + z &= 1 \\ -2x + 10y + 2z &= 4 \\ 10y + 4z &= 6.\end{aligned}$$

Es gilt:

- (a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.
- (b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.
- (c) Das lineare Gleichungssystem hat genau zwei unterschiedliche Lösungen.
- (d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

3. Es seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welcher der folgenden Vektoren ergänzt v_1, v_2 zu einer Basis des \mathbb{R}^3 ?

- (a) $(0, 1, 0)^t$.
- (b) $(0, 1, 2)^t$.
- (c) $(-1, 1, 0)^t$.
- (d) $(0, 0, 0)^t$.

4. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist *nicht* korrekt?

- (a) $A - \mathbb{1}_2$ und B kommutieren.
- (b) A^{-1} und B^{-1} kommutieren.
- (c) A und B kommutieren.
- (d) A^t und B kommutieren.

5. Was ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

- (a) -6 .
- (b) 3 .
- (c) -2 .
- (d) 10 .

6. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Mengen ist kein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 ?

- (a) $\ker(A)$.
- (b) $\operatorname{Im}(A)$.
- (c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- (d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

7. Es sei eine Basis b_1, b_2, b_3 von \mathbb{R}^3 gegeben durch

$$b_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne e_1, e_2, e_3 die Orthonormalbasis, die man erhält wenn man das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens auf b_1, b_2, b_3 (in dieser Reihenfolge) anwendet. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a) $e_3 = (1, 0, 0)^t$.
- (b) $e_3 = (0, 1, 0)^t$.
- (c) $e_3 = (0, 0, 1)^t$.
- (d) $e_3 = (0, 0, 3)^t$.

8. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne $F_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildung gegeben durch $x \mapsto Ax$. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a) Die Abbildung F_A beschreibt eine Spiegelung.
- (b) Die Abbildung F_A beschreibt eine Drehung um die x -Achse um 180° .
- (c) Die Abbildung F_A beschreibt eine Translation.
- (d) Die Abbildung F_A beschreibt eine Drehung um die x -Achse um 90° .

9. Es seien die Basen

$$\mathcal{B} = (x, 2x^2 + x + 1, 3x^2 + x + 1) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}' = (x^2, x, 1)$$

von \mathcal{P}_2 gegeben, wobei \mathcal{P}_2 den reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich zwei bezeichnet. Welche der folgenden Matrizen entspricht der Übergangsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{B}' ?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$

Bitte wenden!

10. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es bezeichne $p_A(\lambda)$ das charakteristische Polynom von A . Welches der folgenden Polynome ist gleich $p_A(\lambda)$?

(a) $q(\lambda) = -(\lambda - i)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

(b) $q(\lambda) = -(\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$.

(c) $q(\lambda) = -(\lambda + i)(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

(d) $q(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

Hinweis: Um die Aufgabe zu lösen muss $p_A(\lambda)$ nicht zwangsläufig berechnet werden.

11. Es sei

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} : A^t = A\}$$

der Untervektorraum von $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ bestehend aus den symmetrischen Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist *korrekt*?

(a) $\dim(U) = 10$.

(b) $\dim(U) = 6$.

(c) $\dim(U) = 12$.

(d) $\dim(U) = 3$.

Siehe nächstes Blatt!

12. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist $\det(A)$?

(a) -6 .

(b) 0 .

(c) -4 .

(d) 4 .

13. Betrachte folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + 2y_3. \end{aligned}$$

Welche Dimension hat der Lösungsraum des obigen Differentialgleichungssystem?

(a) 0 .

(b) 1 .

(c) 2 .

(d) 3 .

Bitte wenden!

14. Was ist e^A für

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}?$$

(a) $\begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

(c) $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$

15. Die Abbildung $\|\cdot\|_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\sum_{i=1}^3 |x_i|^3 \right)^{\frac{1}{3}}.$$

ist eine Norm auf \mathbb{R}^3 . Was ist

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_3?$$

(a) $2 + \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{17}.$

(b) $-2 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{17}.$

(c) $2 - \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{17}.$

(d) $\sqrt[3]{16}.$

Siehe nächstes Blatt!

16. Es seien A, B zwei reguläre Matrizen aus $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. Welche der folgenden Aussagen ist *korrekt*?

- (a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (b) $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.
- (c) $\det(AB^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)}$.
- (d) $\det((AB)^2) = 2 \det(A) \det(B)$.

17. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zwei symmetrische Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a) A^{-1} ist symmetrisch.
- (b) $A + B$ ist symmetrisch.
- (c) A^2 ist symmetrisch.
- (d) AB ist symmetrisch.

18. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Matrix mit charakteristischem Polynom $p_A(\lambda)$ und es sei

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 4.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *wahr*.

- (a) $\text{spur}(A) = -2$.
- (b) $\text{spur}(A) = 2$.
- (c) $\text{spur}(A) = 4$.
- (d) $\text{spur}(A) = -4$.

Bitte wenden!

19. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a) A ist einfach.
- (b) A ist halbeinfach.
- (c) A ist diagonalisierbar.
- (d) es existiert eine natürliche Zahl $n > 1$ so dass A^n diagonalisierbar ist.

20. Es sei die symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

- (a) A ist nicht diagonalisierbar.
- (b) A ist diagonalisierbar und jeder Eigenwert von A ist positiv.
- (c) A ist diagonalisierbar und jeder Eigenwert von A ist negativ.
- (d) A ist diagonalisierbar und A hat negative und positive Eigenwerte.

21. Es $A \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (**2 Punkte**) Zeigen Sie sorgfältig, dass die Vektoren $v_1 := (-1, 1, 0, 0, 0)^t$ und $v_2 := (0, 0, 0, 1, 0)^t$ in $\ker(A)$ liegen.
- (b) (**2 Punkte**) Was ist die Dimension von $\operatorname{Im}(A)$ und $\ker(A)$?
- (c) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$.
- (d) (**3 Punkte**) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\ker(A)$.

22. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $y' = Ay$ wobei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (**4 Punkte**) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ der Matrix A und die Eigenwerte von A .
- (b) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.
Hinweis: Der Vektor $(4, 3, 2, 1, 5)^t$ ist ein Eigenvektor der Matrix A .
- (c) (**2 Punkte**) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = (4, 3, 2, 1, 5)^t$.

23. Auf dem reellen Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten induziert

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

ein Skalarprodukt. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm.

- (a) (**4 Punkte**) Bestimmen Sie ein Polynom $w(x)$ zweiten Grades, so dass $w(x)$ senkrecht auf $p(x) := x + 1$ und $q(x) := x$ steht.
- (b) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie ein Polynom $r(x)$ mit $\|r(x)\| = \sqrt{2019}$.
- (c) (**4 Punkte**) Berechnen Sie $\frac{1}{4} (\|x^3 + x + 1\|^2 - \|x^3 - x - 1\|^2)$.

Bitte wenden!

