

# Lösungen zur Prüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen × erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, −1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls die Frage unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

**WICHTIG:** Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.\*

		wahr	falsch
a)	Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y + 1 \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ .		×
b)	Sei $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $F\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $F\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Dann ist $F\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix}$ .	×	
c)	Sei $V$ ein Vektorraum und seien $u, v \in V$ . Der Durchschnitt aller Unterräume von $V$ , die $u$ und $v$ enthalten, ist gleich $\text{span}\{u, v\}$ .	×	
d)	Sei $A$ eine $n \times m$ Matrix, derart dass $Ax = c$ für alle $c \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung hat. Dann ist $\text{Rang}(A) = m$ .		×
e)	Seien $v_1, v_2, v_3$ Vektoren so dass die drei Paare $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$ und $\{v_1, v_3\}$ linear unabhängig sind. Dann sind $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.		×
f)	Sei $A$ eine Matrix mit charakterischem Polynom $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$ . Dann ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .		×
g)	Die Funktion $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear genau dann wenn $n = 1$ gilt.	×	
h)	Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ . Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ , dann ist $\{p'_1(x), p'_2(x), p'_3(x)\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_1$ .		×
	Ist $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ , dann ist $\{p'_1(x), p'_2(x), p'_3(x)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_1$ .	×	
i)	Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Wenn $A^2 = B^2$ , dann gilt entweder $A = B$ oder $A = -B$ .		×
j)	Jede schiefsymmetrische $3 \times 3$ -Matrix ist singulär.	×	

**Bitte wenden!**

\* verschiedene Serien A, B, C, D

**Siehe nächstes Blatt!**

2. Sei  $C$  der Vektorraum der stetigen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , und sei  $V \subset C$  der Unterraum erzeugt von

$$\mathcal{B} = \{\cos(x), \sin(x), 1, x, x^2\}.$$

$\mathcal{B}$  ist eine Basis von  $V$ .

- a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix  $[L]_{\mathcal{B}}$  der linearen Abbildung

$$L: V \rightarrow V, \quad f(x) \mapsto f(x) + f'(x) + f''(x)$$

bezüglich  $\mathcal{B}$  in der oben gegebenen Reihenfolge.

- b) [3 Punkte] Finden Sie die Eigenwerte von  $[L]_{\mathcal{B}}$ . Ist  $[L]_{\mathcal{B}}$  diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $S \subset V$  der Differentialgleichung  $Lf(x) = \sin(x) + x$ .
- d) [3 Punkte] Beweisen Sie, dass  $\mathcal{B}$  tatsächlich eine Basis von  $V$  ist.  
*Hinweis:* Werten Sie die Funktionen in  $\mathcal{B}$  in den Punkten  $0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$  aus.

**Lösung:** a) Wir berechnen

$$\begin{aligned} L(\cos(x)) &= \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -\sin(x), \\ L(\sin(x)) &= \sin(x) + \cos(x) - \sin(x) = \cos(x), \\ L(1) &= 1, \\ L(x) &= x + 1, \\ L(x^2) &= x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

Es folgt daraus, dass

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da  $[L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  eine Blockmatrix ist, müssen wir nur die Eigenwerte von  $A$  und  $B$  berechnen.

**Bitte wenden!**

Für  $A$  berechnen wir

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i).$$

Deshalb hat die Matrix  $A$  die Eigenwerte  $\lambda_1 = i$  und  $\lambda_2 = -i$ .

Da  $B$  eine Dreiecksmatrix ist, sehen wir sofort dass  $B$  nur den Eigenwert 1 hat, mit algebraischer Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 1. Es folgt daraus, dass  $B$  nicht diagonalisierbar ist. Deswegen ist  $[L]_{\mathcal{B}}$  auch nicht diagonalisierbar.

- c) In der Basis  $\mathcal{B}$  entspricht der Vektor  $\sin(x) + x$  dem Spaltenvektor  $(0, 1, 0, 1, 0)^\top$ . Wir suchen also die eindeutige Lösung  $v \in \mathbb{R}^5$  von  $[L]_{\mathcal{B}}v = (0, 1, 0, 1, 0)^\top$ . Da  $[L]_{\mathcal{B}}$  eine Blockmatrix ist, ist das gewünschte  $v$  gegeben durch die Lösungen  $v_a$  und  $v_b$  von  $Av_a = (0, 1)^\top$  und  $Bv_b = (0, 1, 0)^\top$ .

Wir berechnen

$$v_a = A^{-1}(0, 1)^\top = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (0, 1)^\top = (-1, 0)^\top,$$

und

$$v_b = B^{-1}(0, 1, 0)^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 1, 0)^\top = (-1, 1, 0)^\top.$$

Es folgt daraus, dass  $v = (-1, 0, -1, 1, 0)^\top$  ist, und deshalb, dass  $f(x) = -\cos(x) + x - 1$  ist.

- d) Wir müssen zeigen, dass die Elemente von  $\mathcal{B}$  linear unabhängig sind. Nehmen wir eine lineare Kombination

$$a_1 \cos(x) + a_2 \sin(x) + a_3 + a_4 x + a_5 x^2 = 0, \quad (1)$$

wobei die  $a_i \in \mathbb{R}$  sind.

Werten wir die Gleichung (1) in den Punkten  $x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi$  aus. Man findet

$$a_1 + a_3 = 0 \quad (2)$$

$$a_2 + a_3 + \frac{a_4 \pi}{2} + \frac{a_5 \pi^2}{4} = 0 \quad (3)$$

$$-a_2 + a_3 - \frac{a_4 \pi}{2} + \frac{a_5 \pi^2}{4} = 0 \quad (4)$$

$$-a_1 + a_3 + a_4 \pi + a_5 \pi^2 = 0 \quad (5)$$

$$a_1 + a_3 - a_4 \pi + a_5 \pi^2 = 0 \quad (6)$$

Aus (3) + (4) und (5) + (6) bekommt man

$$2a_3 + \frac{\pi^2 a_5}{2} = 0$$

$$2a_3 + 2\pi^2 a_5 = 0$$

Diese zwei Gleichungen haben nur die Lösung  $a_3 = 0, a_5 = 0$ . Dann impliziert (2), dass  $a_1 = 0$  ist. Aus (6) - (2) bekommt man  $-\pi a_4 = 0 \leadsto a_4 = 0$ , womit auch  $a_2 = 0$ . Es folgt daraus, dass die lineare Kombination (1) trivial sein muss.

**Siehe nächstes Blatt!**

3. Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = -3x_1^2 + 8x_1x_3 + x_2^2 + 3x_3^2.$$

- a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix  $A$ , sodass  $q(x) = x^\top A x$  ist.
- b) [4 Punkte] Eine Quadrik  $Q$  ist gegeben durch die Gleichung  $q(x) = 4$ . Bringen Sie die Quadrik durch eine Hauptachsentransformation  $x = Ty$  auf Normalform, und geben Sie dabei auch  $T$  explizit an.
- c) [4 Punkte] Bestimmen Sie, welche der Hauptachsen die Quadrik  $Q$  nicht schneidet, und begründen Sie Ihre Antwort.

**Lösung:** a)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b) Wir müssen  $A$  diagonalisieren. Erstens finden wir die Eigenwerte von  $A$ .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-3 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 4(1 - \lambda) \cdot 4 \\ &= (1 - \lambda)[(-3 - \lambda)(3 - \lambda) - 16] \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 25). \end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind die gesuchten Eigenwerte (EW):  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\lambda_3 = -5$ . Die entsprechenden Eigenräume/Eigenvektoren sind:

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{span}\{(0, 1, 0)^\top\} \\ E_5 &= \text{span}\{(1, 0, 2)^\top\} \\ E_{-5} &= \text{span}\{(-2, 0, 1)^\top\} \end{aligned}$$

Nun ordnen wir die Eigenvektoren in den Matrizen  $T$  und  $D$  an (wobei wir für  $T$  die Spalten nur noch zu normieren brauchen) und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Weiter: Es gilt  $D = T^\top A T$  und als Normalform von  $q$  bekommen wir

$$4 = q(x) = q(Ty) = (Ty)^\top A (Ty) = y^\top T^\top A T y = y^\top D y = y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2,$$

was man aber auch direkt hinschreiben darf, da sich die Normalform sofort aus den Eigenwerten ablesen lässt.

**Bitte wenden!**

- c) Die Hauptachse zum negativen Eigenwert schneidet  $\{x \mid q(x) = 4\}$  nicht. Die anderen beiden schon. Beweis: Die Achse zum EW  $-5$  ist der Eigenraum  $E_{-5}$ . Für jeden Vektor  $v$  auf dieser Achse gilt natürlich  $Av = -5v$  und somit

$$q(v) = v^T Av = v^T(-5v) = -5v^T v = -5v^T v = -5||v||^2 \leq 0.$$

Insbesondere ist  $q(v)$  nie gleich 4 und die Achse scheidet  $\{x \mid q(x) = 4\}$  nicht.

Für die anderen zwei Hauptachsen bekommt man  $q(x) = x^T Ax = \lambda ||x||^2$ , wobei  $x \in E_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 5$ . In beiden Fällen gilt: Ist  $x \in E_\lambda$  derart dass  $||x||^2 = \frac{4}{\lambda}$ , so folgt  $x \in Q$ .

NB: Man könnte die Lösung auch mit den y-Koordinaten formulieren. In diesem Fall sind die drei Hauptachsen die gewöhnliche Koordinatenachsen gegeben durch den Span von den Vektoren  $(1, 0, 0)^T$ ,  $(0, 1, 0)^T$  und  $(0, 0, 1)^T$ .

4. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_3 \\y_2' &= -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\y_3' &= -4y_1 + 2y_3.\end{aligned}$$

- a) [1 Punkt] Schreiben Sie das System in der Form  $y' = Ay$  mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .
- b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  sowie die zugehörigen Eigenvektoren von  $A$ .
- c) [5 Punkte] Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems  $y' = Ay$ , und lösen Sie das Anfangswertproblem,  $y(0) = (0, 0, 1)^\top$ .

**Lösung:** a) In Matrixform lautet das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

b) Das charakteristische Polynom von  $A$  lautet

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)^3 - (2 - \lambda)(-4) = (2 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 + 4] = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 8) \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda - 2 - 2i)(\lambda - 2 + 2i).\end{aligned}$$

und daher sind die Eigenwerte  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 2 + 2i$ ,  $\lambda_3 = 2 - 2i$ . Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist der Kern von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Spalte impliziert, dass  $E_2 = \text{span}\{(0, 1, 0)^\top\}$  ist. Analog berechnet man  $E_{2+2i} = \text{span}\{(-\frac{i}{2}, \frac{1}{2} - i, 1)^\top\}$  und  $E_{2-2i} = \text{span}\{(\frac{i}{2}, \frac{1}{2} + i, 1)^\top\}$ .

c) Der Real- und Imaginärteil der komplexen Lösung

$$Y(t) = e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefern je eine reelle Lösung des Systems:

$$\begin{aligned}Y_2(t) &= \text{Re}(Y(t)) = e^{2t} \left[ \cos(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ Y_3(t) &= \text{Im}(Y(t)) = e^{2t} \left[ \sin(2t) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2t) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right].\end{aligned}$$

**Bitte wenden!**

Dazu haben wir die reelle Lösung

$$Y_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da diese Lösungen linear unabhängig sind, erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \left\{ [a \cos(2t) + b \sin(2t)] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - [a \sin(2t) - b \cos(2t)] \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{e^{2t}}{2} [a \sin(2t) + b \cos(2t)] \\ y_2(t) &= C e^{2t} + e^{2t} \left[ \left( \frac{a}{2} - b \right) \cos(2t) + \left( a + \frac{b}{2} \right) \sin(2t) \right] \\ y_3(t) &= e^{2t} [a \cos(2t) + b \sin(2t)]. \end{aligned}$$

Setzen wir  $t = 0$  und die geforderten Anfangswerte ein. Die eindeutige Lösung ist  $C = -\frac{1}{2}, a = 1, b = 0$ .

**Siehe nächstes Blatt!**



5. Auf  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  sei das folgende Skalarprodukt gegeben<sup>1</sup>:

$$\langle A, B \rangle := \text{Spur}(AB^\top).$$

- a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass dieser Ausdruck tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.
- b) [2 Punkte] Sei  $V$  die Teilmenge von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  bestehend aus allen Matrizen mit Spur gleich Null:

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \text{Spur}(A) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass  $V$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist, und dass die Matrizen

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  bilden.

- c) [3 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf  $\mathcal{B}$  in der gegebenen Reihenfolge an, um eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}'$  von  $V$  zu erhalten.
- d) [2 Punkte] Betrachten Sie die lineare Abbildung  $F: V \rightarrow V$  definiert durch  $A \mapsto AB_1 - B_1A$ . Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

**Lösung:** a) Ein Skalarprodukt muss bilinear, symmetrisch und positiv definit sein; wir überprüfen diese drei Eigenschaften. Seien  $A, B$  und  $C$   $(2 \times 2)$ -Matrizen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- *Bilinearität:* Dank der Symmetrie (siehe unten) müssen wir nur die Linearität in der ersten Komponente überprüfen:

$$\langle \lambda A + B, C \rangle = \text{Spur}((\lambda A + B)C^\top) = \lambda \text{Spur}(AC^\top) + \text{Spur}(BC^\top) = \lambda \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

aufgrund der Linearität der Spur.

- *Symmetrie:* Wegen der Identität  $\text{Spur}(A^\top) = \text{Spur}(A)$  ist

$$\langle A, B \rangle = \text{Spur}(AB^\top) = \text{Spur}(BA^\top) = \langle B, A \rangle.$$

- *Positivdefinitheit:* Sei

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\langle A, A \rangle = \text{Spur}(AA^\top) = \text{Spur} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0,$$

und  $\langle A, A \rangle = 0$  genau dann, wenn  $a = b = c = d = 0$ .

---

<sup>1</sup>Zur Erinnerung: Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

b) Betrachte die lineare Abbildung

$$\text{Spur}: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Spur}(A).$$

Da  $V$  genau der Kern von dieser Abbildung ist, folgt daraus, dass  $V$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist. Natürlich kann man auch direkt überprüfen, dass  $A + \lambda B \in V$  für alle  $A, B \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist.

Die Matrizen  $B_i$  sind sichtbar linear unabhängig. Es gelten

$$4 = \dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = \dim \text{Kern}(\text{Spur}) + \dim \text{Bild}(\text{Spur})$$

und  $\dim \text{Bild}(\text{Spur}) = 1$ . Da  $V = \text{Kern}(\text{Spur})$  ist, folgt es, dass  $\dim(V) = 3$  ist. Die  $B_i$  sind deshalb eine Basis von  $V$ .

c) Zuerst normieren wir  $B_1$ , um den ersten Vektor  $B'_1$  unserer Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten:

$$B'_1 = \frac{B_1}{\|B_1\|} = \frac{1}{\text{Spur} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Gram-Schmidt ergibt  $\hat{B}_2 = B_2 - \langle B_2, B'_1 \rangle B'_1$  einen Vektor, dessen Normalisierung  $B'_2$  der zweite Vektor der ONB ist:

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \text{Spur} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B'_2.$$

weil die Matrix schon normiert ist.

Mit analoger Notation führen wir Gram-Schmidt weiter durch, um den dritten Vektor  $B'_3$  zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \hat{B}_3 &= B_3 - \langle B_3, B'_1 \rangle B'_1 - \langle B_3, B'_2 \rangle B'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \text{Spur} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \text{Spur} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$B'_3 = \frac{\hat{B}_3}{\|\hat{B}_3\|} = \frac{1}{\text{Spur} \left( \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{1/2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge  $\mathcal{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3\}$  ist eine Orthonormalbasis von  $V$ .

d) Zuerst berechnen wir  $F(B_i)$  für jeden Basisvektor  $B_i \in \mathcal{B}$ . Man findet

$$\begin{aligned} F(B_1) &= 0 \\ F(B_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2(B_2 - B_1) \\ F(B_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2(B_3 - B_1). \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Deshalb ist die Darstellungsmatrix von  $F$  bezüglich  $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$