Lernkontrolle Lineare Algebra 2

Wichtige Hinweise:

Sie haben für den folgenden Test **45 Minuten** Zeit. Jede MC-Frage besteht aus zwei Teilen: Einem inhaltlichen Teil und einem metakognitiven Teil. Bei der inhaltlichen Frage ist jeweils **genau eine Antwort korrekt**. Bei der dazugehörigen metakognitiven Frage geben Sie bitte jeweils auf einer Skala von 1 bis 5 an, wie sicher Sie sich bezüglich Ihrer Antwort fühlen. Eine 1 bedeutet hierbei «ich fühle mich gar nicht sicher», während eine 5 für «ich fühle mich sehr sicher» steht. Falls Sie keine Zeit mehr haben, eine oder mehrere Aufgaben zu lösen, so kreuzen Sie bei der jeweiligen metakognitiven Frage bitte **keine** Antwort an. Die Aufgaben dürfen in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Es sind **keine Hilfsmittel** erlaubt.

Für die sinnvolle Bearbeitung dieser Lernkontrolle erhalten Sie 1 Bonuspunkt, ansonsten 0 Punkte. Um 1 Bonuspunkt zu erhalten, müssen zudem die folgenden Mindestvoraussetzungen erfüllt sein:

- Der Test wird während der **gesamten** Testdauer bearbeitet (frühzeitige Abgaben werden mit 0 Punkten bewertet, Verspätungen von mehr als 5 Minuten werden ebenfalls mit 0 Punkten bewertet).
- Die Aufgaben werden ernsthaft und gewissenhaft bearbeitet.

Unrechtmässiges Handeln führt ebenfalls zu einer Bewertung mit 0 Punkten.

Zum Ausfüllen der Antwortblätter:

- Falls nötig, korrigieren Sie falsche Antworten mit **Tipp-Ex Korrekturfolien** (es darf **kein flüssiger Tipp-Ex** verwendet werden). Falls Sie keinen solchen Tipp-Ex besitzen, melden Sie dies bitte dem Hilfsassistenten/der Hilfsassistentin. **Zeichnen Sie nach einer Korrektur das Kästchen nicht nach**.
- Verwenden Sie keine Bleistifte oder Filzstifte/Füller, die auf die Rückseite des Antwortbogens durchdrücken. Schreiben Sie mit einem **Kugelschreiber in blauer oder schwarzer Farbe**, keinesfalls in roter oder grüner.
- Schreiben Sie keine Notizen auf die Antwortblätter und tackern Sie die Antwortblätter nicht zusammen.
- **Bitte malen Sie die Antwortkästchen wie im folgenden Beispiel aus:**

1) Betrachten Sie die Matrix A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

b) 0 ist ein Eigenwert von A.

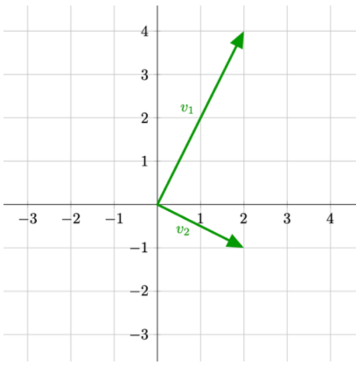
c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

d) -1 ist ein Eigenwert von A.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

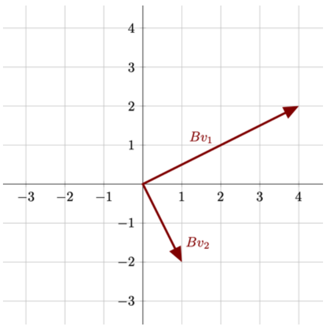
Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

2) Die untenstehende Graphik zeigt die Eigenvektoren v_1 und v_2 einer Matrix B.

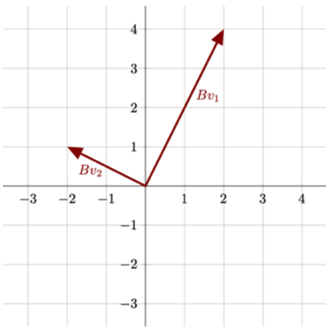


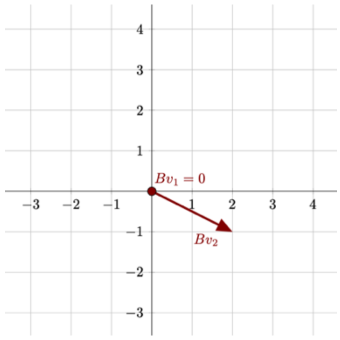
Welche der folgenden Graphiken kann **keine** Darstellung von Bv_1 und Bv_2 sein?

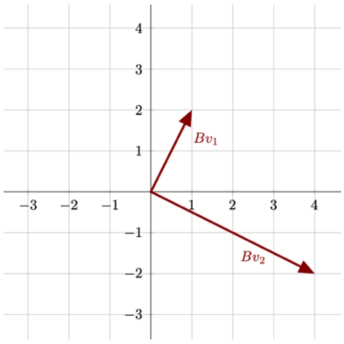
a)



b)



c) 

d) 

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

3) Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 18 & 14 & 10 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) C hat nur einen einzigen Eigenwert.
b) 0 ist ein Eigenwert von C mit algebraischer Vielfachheit 2.
c) C hat 5 paarweise verschiedene Eigenwerte.
d) 1 ist ein Eigenwert von C mit algebraischer Vielfachheit 4.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

4) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ sowie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $v_3 \in Im(A)$
b) $v_2 \in Ker(A)$
c) $v_1 \in Im(A)$
d) $v_3 \in Ker(A)$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

5) Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ sowie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $v \in Im(B)$ und $v \notin Ker(B)$
b) $v \notin Im(B)$ und $v \in Ker(B)$
c) $v \notin Im(B)$ und $v \notin Ker(B)$
d) $v \in Im(B)$ und $v \in Ker(B)$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

6) Betrachten Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{4x2}$.

Welche der folgenden Aussagen ist sicherlich **falsch**?

a) $\dim\big(Im(C)\big) = 3$
b) $\dim\big(Im(C)\big) = 2$
c) $\dim\big(Ker(C)\big) = 1$
d) $\dim\big(Ker(C)\big) = 0$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

7) Betrachten Sie zwei Vektoren u, v, für welche $< v, u > = 6$ gilt. $< . , . >$ bezeichnet ein Skalarprodukt.

Dann ist das Skalarprodukt $< 5v , -2u > =$ …

a) 18
b) -12
c) 30
d) -60

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

8) Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$< p, q > := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Betrachten Sie zudem die Polynome $v(x) = 6x^2 - 1$, $u(x) = x - 1$ und $w(x) = -5x^2$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) v und u sind orthogonal, w besitzt Länge 5.
b) v und u sind nicht orthogonal, w besitzt Länge 5.
c) v und u sind orthogonal, w besitzt Länge $\sqrt{5}$.
d) v und u sind nicht orthogonal, w besitzt Länge $\sqrt{5}$.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

9) Welche der folgenden Abbildungen definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$?

a) $< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} > = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_2$
b) $< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} > = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$
c) $< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} > = (x_1 + 1)(y_1 + 1) + x_2 y_2$
d) $< \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} > = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$

Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

10) Betrachten Sie die orthogonale Projektion Π_v auf den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, für welche $\Pi_v \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt.

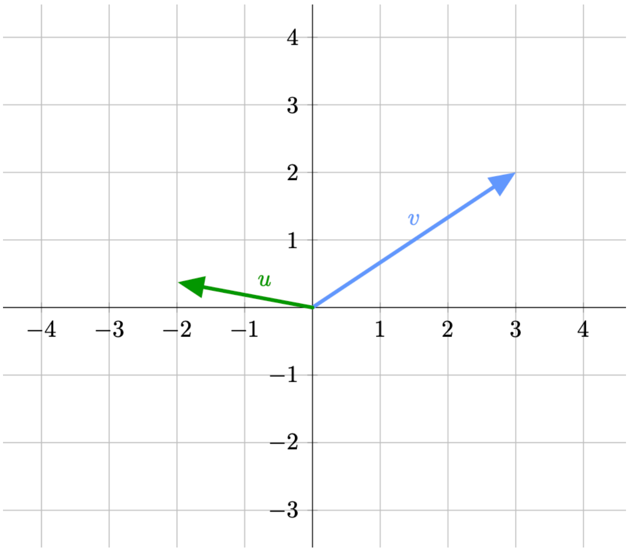
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
c) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
d) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

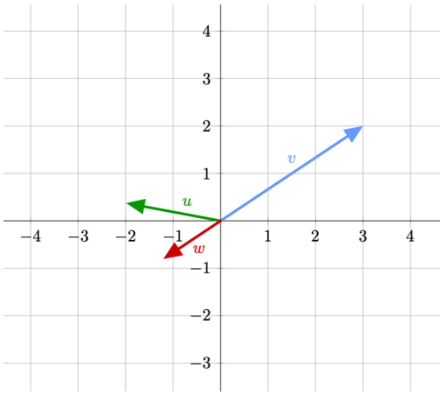
Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

11) Die folgende Abbildung zeigt die Vektoren u und v in $\mathbb{R}^2$.

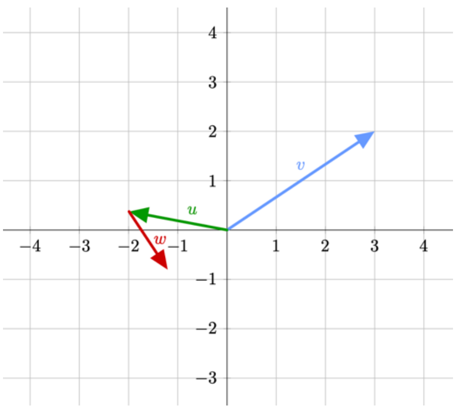


Für welche der folgenden Abbildungen gilt $w = \Pi_v(u)$, wobei Π_v die orthogonale Projektion auf v beschreibt?

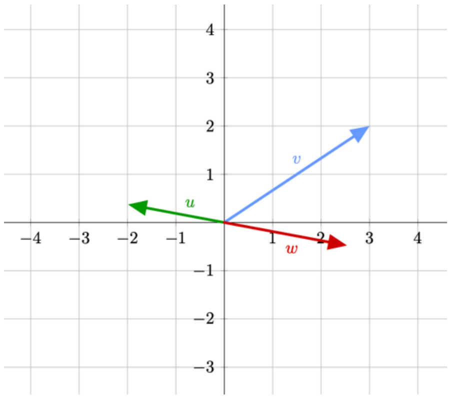
a)



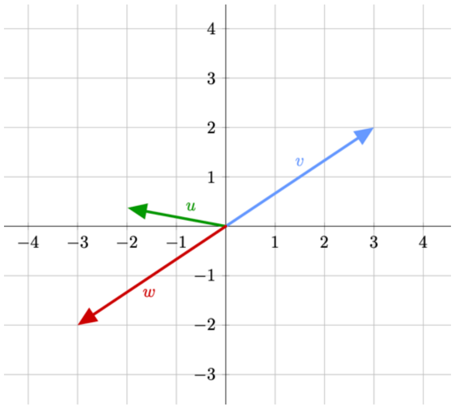
b)



c)



d)



Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

12) Betrachten Sie zwei beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ sowie die orthogonale Projektion Π_v.

Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr?

a) $\Pi_v\big(\Pi_v(u)\big) = 0$
b) $\Pi_v\big(\Pi_v(u)\big) = v$
c) $\Pi_v\big(\Pi_v(u)\big) = u$
d) $\Pi_v\big(\Pi_v(u)\big) = \Pi_v(u)$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

13) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$. Wir diagonalisieren A mit Hilfe einer Transformationsmatrix T wie folgt: $D = T^{-1}AT$.

Welche der folgenden Matrizen kommt als D in Frage?

a) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
c) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
d) $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

14) Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix B lässt sich wie folgt diagonalisieren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen gilt dann für B^2?

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

15) Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 & -8 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

a) Alle Eigenwerte von C sind reell.
b) Es existiert eine Eigenbasis zu C.
c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von C sind orthogonal.
d) C ist nicht orthogonal diagonalisierbar.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher