

Lernkontrolle Lineare Algebra 2

Wichtige Hinweise:

Sie haben für den folgenden Test **45 Minuten** Zeit. Jede MC-Frage besteht aus zwei Teilen: Einem inhaltlichen Teil und einem metakognitiven Teil. Bei der inhaltlichen Frage ist jeweils **genau eine Antwort korrekt**. Bei der dazugehörigen metakognitiven Frage geben Sie bitte jeweils auf einer Skala von 1 bis 5 an, wie sicher Sie sich bezüglich Ihrer Antwort fühlen. Eine 1 bedeutet hierbei «ich fühle mich gar nicht sicher», während eine 5 für «ich fühle mich sehr sicher» steht. Falls Sie keine Zeit mehr haben, eine oder mehrere Aufgaben zu lösen, so kreuzen Sie bei der jeweiligen metakognitiven Frage bitte **keine** Antwort an. Die Aufgaben dürfen in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Es sind **keine Hilfsmittel** erlaubt.

Für die sinnvolle Bearbeitung dieser Lernkontrolle erhalten Sie 1 Bonuspunkt, ansonsten 0 Punkte. Um 1 Bonuspunkt zu erhalten, müssen zudem die folgenden Mindestvoraussetzungen erfüllt sein:

- Der Test wird während der **gesamten** Testdauer bearbeitet (frühzeitige Abgaben werden mit 0 Punkten bewertet, Verspätungen von mehr als 5 Minuten werden ebenfalls mit 0 Punkten bewertet).
- Die Aufgaben werden ernsthaft und gewissenhaft bearbeitet.

Unrechtmässiges Handeln führt ebenfalls zu einer Bewertung mit 0 Punkten.

Zum Ausfüllen der Antwortblätter:

- Falls nötig, korrigieren Sie falsche Antworten mit **Tipp-Ex Korrekturfolien** (es darf **kein flüssiger Tipp-Ex** verwendet werden). Falls Sie keinen solchen Tipp-Ex besitzen, melden Sie dies bitte dem Hilfsassistenten/der Hilfsassistentin. **Zeichnen Sie nach einer Korrektur das Kästchen nicht nach.**
- Verwenden Sie keine Bleistifte oder Filzstifte/Füller, die auf die Rückseite des Antwortbogens durchdrücken. Schreiben Sie mit einem **Kugelschreiber in blauer oder schwarzer Farbe**, keinesfalls in roter oder grüner.
- Schreiben Sie keine Notizen auf die Antwortblätter und tackern Sie die Antwortblätter nicht zusammen.
- **Bitte malen Sie die Antwortkästchen wie im folgenden Beispiel aus:**

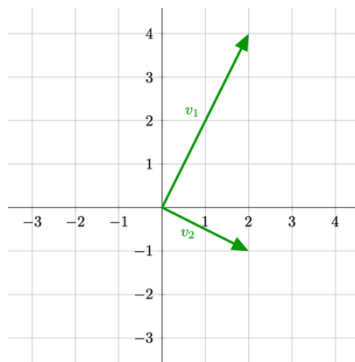
1) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
- b) 0 ist ein Eigenwert von A.
- c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.
- d) -1 ist ein Eigenwert von A.**

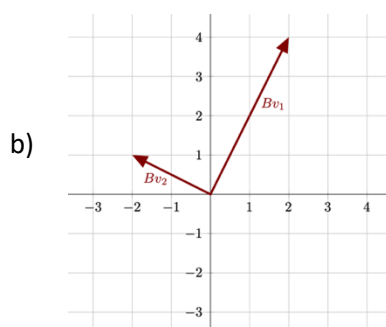
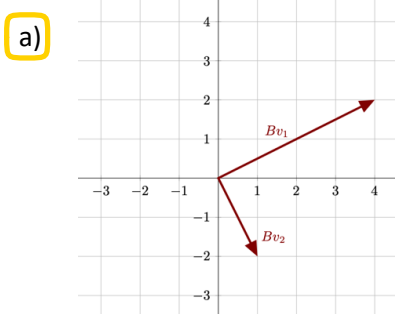
Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

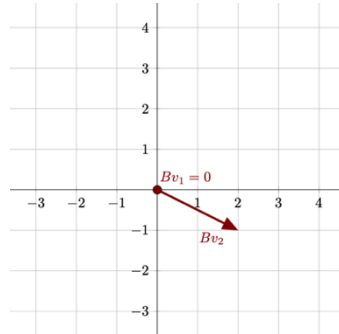
2) Die untenstehende Graphik zeigt die Eigenvektoren v_1 und v_2 einer Matrix B .



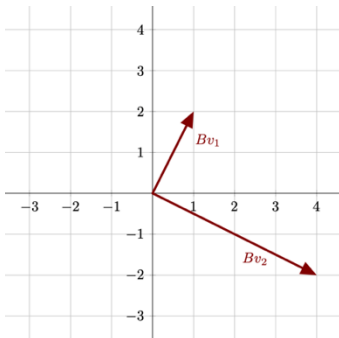
Welche der folgenden Graphiken kann **keine** Darstellung von Bv_1 und Bv_2 sein?



c)



d)



Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

3) Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 18 & 14 & 10 & 6 & 2 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- a) C hat nur einen einzigen Eigenwert.
- b) 0 ist ein Eigenwert von C mit algebraischer Vielfachheit 2.
- c) C hat 5 paarweise verschiedene Eigenwerte.
- d) 1 ist ein Eigenwert von C mit algebraischer Vielfachheit 4.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

- 4) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ sowie die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- a) $v_3 \in \text{Im}(A)$
- b) $v_2 \in \text{Ker}(A)$
- c) $v_1 \in \text{Im}(A)$
- d) $v_3 \in \text{Ker}(A)$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

- 5) Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ sowie den Vektor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- a) $v \in \text{Im}(B)$ und $v \notin \text{Ker}(B)$
- b) $v \notin \text{Im}(B)$ und $v \in \text{Ker}(B)$
- c) $v \notin \text{Im}(B)$ und $v \notin \text{Ker}(B)$
- d) $v \in \text{Im}(B)$ und $v \in \text{Ker}(B)$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

6) Betrachten Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$.

Welche der folgenden Aussagen ist sicherlich **falsch**?

- a) $\dim(\text{Im}(C)) = 3$
- b) $\dim(\text{Im}(C)) = 2$
- c) $\dim(\text{Ker}(C)) = 1$
- d) $\dim(\text{Ker}(C)) = 0$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

7) Betrachten Sie zwei Vektoren u, v , für welche $\langle v, u \rangle = 6$ gilt. $\langle \dots \rangle$ bezeichnet ein Skalarprodukt.

Dann ist das Skalarprodukt $\langle 5v, -2u \rangle = \dots$

- a) 18
- b) -12
- c) 30
- d) -60

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

8) Betrachten Sie das folgende Skalarprodukt im Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Betrachten Sie zudem die Polynome $v(x) = 6x^2 - 1$, $u(x) = x - 1$ und $w(x) = -5x^2$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- a) v und u sind orthogonal, w besitzt Länge 5.
- b) v und u sind nicht orthogonal, w besitzt Länge 5.
- c) v und u sind orthogonal, w besitzt Länge $\sqrt{5}$.
- d) v und u sind nicht orthogonal, w besitzt Länge $\sqrt{5}$.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

9) Welche der folgenden Abbildungen definiert ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 ?

a) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_2$

b) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$

c) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = (x_1 + 1)(y_1 + 1) + x_2 y_2$

d) $\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$

Hinweis: Rufen Sie sich die Axiome eines Skalarprodukts in Erinnerung.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

10) Betrachten Sie die orthogonale Projektion Π_v auf den Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, für welche

$\Pi_v \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

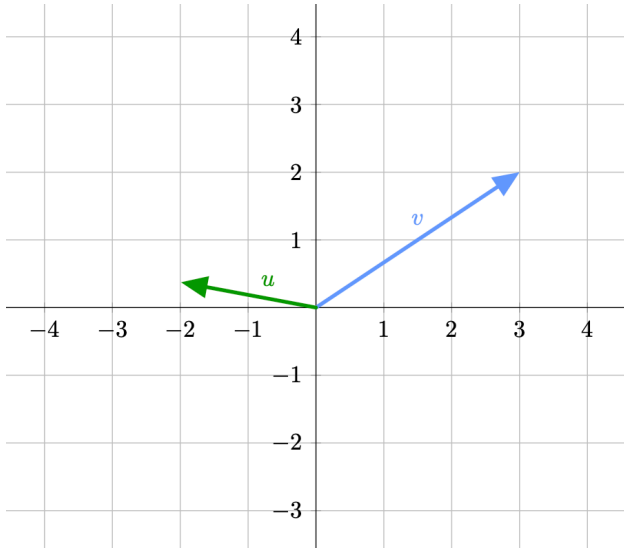
c) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\Pi_v \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

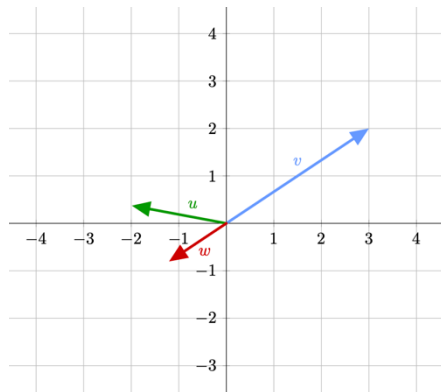
Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

11) Die folgende Abbildung zeigt die Vektoren u und v in \mathbb{R}^2 .

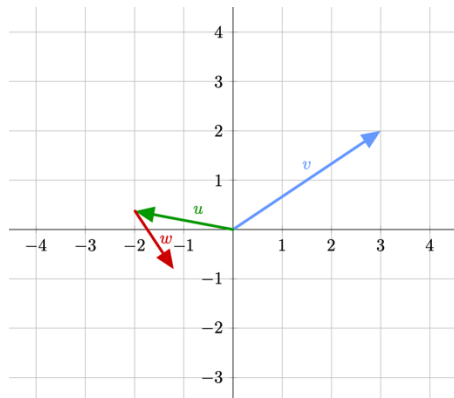


Für welche der folgenden Abbildungen gilt $w = \Pi_v(u)$, wobei Π_v die orthogonale Projektion auf v beschreibt?

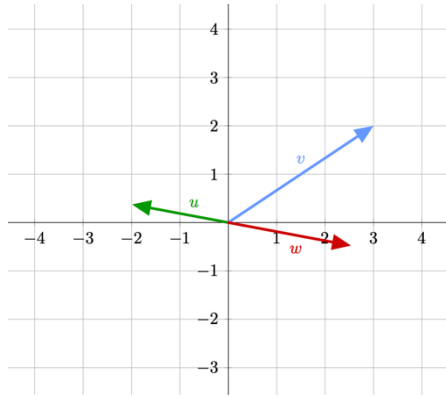
a)



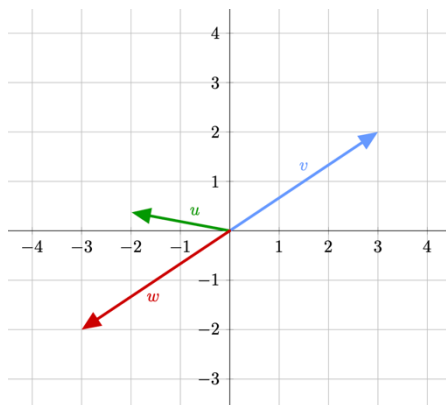
b)



c)



d)



Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

12) Betrachten Sie zwei beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ sowie die orthogonale Projektion Π_v .

Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr?

- a) $\Pi_v(\Pi_v(u)) = 0$
- b) $\Pi_v(\Pi_v(u)) = v$
- c) $\Pi_v(\Pi_v(u)) = u$
- d) $\Pi_v(\Pi_v(u)) = \Pi_v(u)$**

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

- 13) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$. Wir diagonalisieren A mit Hilfe einer Transformationsmatrix T wie folgt: $D = T^{-1}AT$.

Welche der folgenden Matrizen kommt als D in Frage?

- a) $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
c) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
d) $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

- 14) Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix B lässt sich wie folgt diagonalisieren:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen gilt dann für B^2 ?

- a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$
c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
d) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher

15) Betrachten Sie die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 & -8 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -8 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

- a) Alle Eigenwerte von C sind reell.
- b) Es existiert eine Eigenbasis zu C .
- c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von C sind orthogonal.
- d) C ist nicht orthogonal diagonalisierbar.

Wie sicher fühlen Sie sich, dass Ihre Antwort korrekt ist?

Gar nicht sicher 1 2 3 4 5 Sehr sicher