D-MAVT — Lineare Algebra II — FS 2020

Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 1 - Bonusaufgabe A

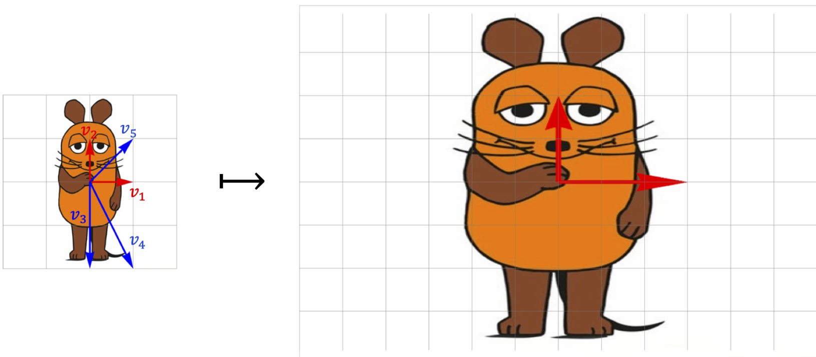
Die Abgabe der Bonusaufgabe A erfolgt am **Donnerstag, den 20. Februar** in der Vorlesung. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

1. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_a : x \mapsto Ax$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_a :



Betrachten Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5. Berechnen Sie für alle $i = 1, \ldots, 5$ die Bilder Av_i der Vektoren v_i und zeichnen Sie diese in der Skizze oben ein. Kontrastieren Sie dann die Vektoren v_i mit ihren Bildern Av_i geometrisch und algebraisch. Tragen Sie Ihre Beobachtungen in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

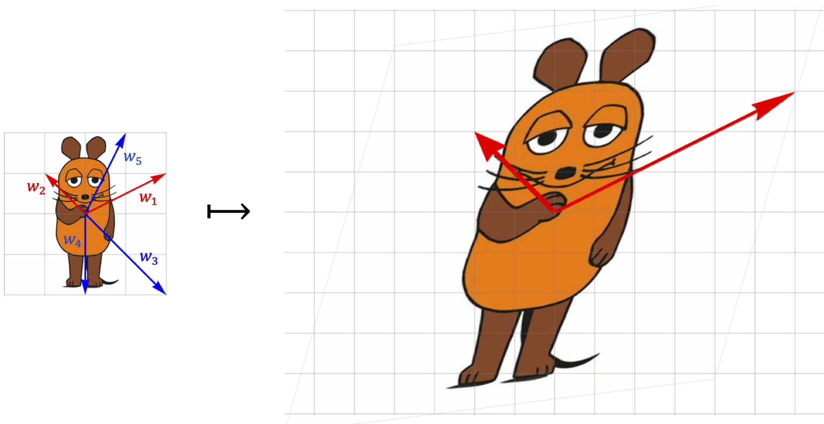
	Av_i	geometrischer Vergleich v_i vs. Av_i	algebraischer Vergleich v_i vs. Av_i
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$			
$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$			
$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$			
$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$			
$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$			

Überlegen Sie sich, ob Ähnlichkeiten zwischen einigen dieser Vektoren in Bezug auf die von Ihnen entdeckten Eigenschaften bestehen. Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Betrachten Sie nun die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_b : x \mapsto Bx$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_b :



Betrachten Sie die Vektoren w_1, w_2, w_3, w_4 und w_5. Berechnen Sie für alle $i = 1, \dots, 5$ die Bilder Bw_i der Vektoren w_i und zeichnen Sie diese in der Skizze oben ein. Kontrastieren Sie dann die Vektoren w_i mit ihren Bildern Bw_i geometrisch und algebraisch. Tragen Sie Ihre Beobachtungen in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

	Bw_i	geometrischer Vergleich w_i vs. Bw_i	algebraischer Vergleich w_i vs. Bw_i
$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$			
$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$			
$w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$			
$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$			
$w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = w_1 + w_2$			

Überlegen Sie sich, ob Ähnlichkeiten zwischen einigen dieser Vektoren in Bezug auf die von Ihnen entdeckten Eigenschaften bestehen. Begründen Sie Ihre Antwort.

Serie 1 - Bonusaufgabe B

Die Abgabe der Bonusaufgabe B erfolgt am **Freitag, den 21. Februar** in Ihrer Übungsstunde. Die Abgabe kann ausschliesslich in derjenigen Übungsgruppe erfolgen, in die Sie sich zu Beginn des Semesters eingeschrieben haben. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.

Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

Betrachten Sie das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

und rufen Sie sich die folgenden Begriffe in Erinnerung:

- Die *Länge* eines Vektors $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:
$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$
- Der *Winkel* γ zwischen zwei Vektoren u und w hängt folgendermassen mit dem Skalarprodukt von u und w zusammen:
$$\frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \cdot \|w\|} = \cos(\gamma)\,.$$
- Zwei Vektoren u und w, welche die Bedingung $\langle u, w \rangle = 0$ erfüllen, heissen *orthogonal*.

Betrachten Sie nun den Vektorraum $\mathbb{R}^5$. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathbb{R}^5$, können wir im Vektorraum $\mathbb{R}^5$ ein Skalarprodukt definieren, welches analog ist zum Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \sum_{i=1}^{5} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5. \end{aligned}$$

Auch im $\mathbb{R}^5$ ist die Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^5$ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

1. Betrachten Sie die Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \, d = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \, e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors c. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $f = 4c$ und $g = -5c$. Basierend auf der Länge des Vektors c, was würden Sie für die Längen der Vektoren f und g erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren f und g berechnen.

(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren d und e.

(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathbb{R}^5$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathbb{R}^5$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathcal{P}_2$, können wir auch im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ die Länge eines Vektors definieren.

Die Länge eines Vektors p im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{P}_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \|p\| := \sqrt{\int_0^1 p\,(x)\, p\,(x)\, dx} \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Polynome

$$u\,(x) = -3x^2 + 2x - 4,\ v\,(x) = 2x^2 + 6, w\,(x) = -x^2 + 3x - 8.$$

(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors u. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $s = 3u$ und $t = -4u$. Basierend auf der Länge des Vektors u, was würden Sie für die Längen der Vektoren s und t erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren s und t berechnen.

(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren v und w.

(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathcal{P}_2$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathcal{P}_2$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

3. In der folgenden Tabelle sind die Vektorräume aufgeführt, welche in den vorhergehenden Aufgaben diskutiert worden sind. Da die drei Vektorräume ähnlich aufgebaut sind, würden wir auch die Existenz eines Skalarproduktes im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ erwarten. Vergleichen und kontrastieren Sie die Einträge in der Tabelle miteinander – welchen Ausdruck vermuten Sie für den leeren Tabelleneintrag? Begründen Sie Ihre Antwort.

V	**Länge eines Vektors** $v \in V$	**Skalarprodukt zweier Vektoren** $a, b \in V$
$\mathbb{R}^3$	$\|v\| = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3}$	$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
$\mathbb{R}^5$	$\|v\| = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + v_4 v_4 + v_5 v_5}$	$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5$
$\mathcal{P}_2$	$\|v\| = \sqrt{\int_0^1 v(x) v(x) \, \mathrm{d}x}$	

Serie 1

Die Aufgaben 1–9 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 28. Februar um 14:00 Uhr** ab.

Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

Entscheiden Sie bei den folgenden 9 Aufgaben, ob die angegebene Funktion f linear ist oder nicht.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

7. $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

8. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

9. $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen sin und cos ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht.

(a) f ist linear

(b) f ist nicht linear

10. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ in sich:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

b) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

11. Gegeben sei der 4-dimensionale Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome vom Grad ≤ 3. Zeigen Sie, dass die ersten vier Tschebyscheff-Polynome zweiter Art

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,\ U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

eine Basis von $\mathcal{P}_3$ bilden.

12. Die Vektoren $a = (1, -2, 5, -3)^T$, $b = (2, 3, 1, -4)^T$ und $c = (3, 8, -3, -5)^T$ erzeugen einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

a) Bestimmen Sie $\dim W$ und eine Basis von W.

b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches W als Lösungsraum hat.