D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2020

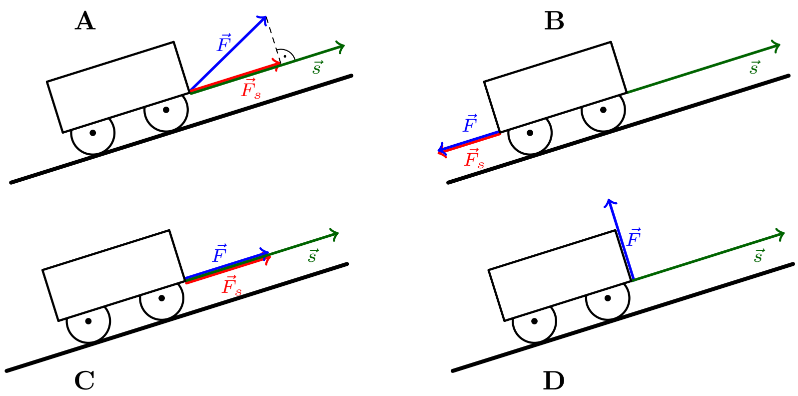
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 2- Bonusaufgabe

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt am **Freitag, 28. Februar** in der Übungsstunde. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

1. Betrachten Sie die folgenden Skizzen, welche je eine Situation darstellen, in welcher ein Wagen mit der Kraft $\vec{F}$ entlang einer Steigung gezogen wird.



Rufen Sie sich den folgenden Zusammenhang aus dem Physikunterricht in Erinnerung: Lediglich diejenige Kraftkomponente von $\vec{F}$, welche entlang der Bewegungsrichtung wirkt, trägt zur verrichteten physikalischen Arbeit bei. Diese Kraftkomponente ist in den Skizzen mit $\vec{F_s}$ bezeichnet. Das Ziel der folgenden Aufgabe ist es, mit Hilfe von Skalarprodukten einen Ausdruck für $\vec{F_s}$ zu finden. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben in chronologischer Reihenfolge.

Betrachten Sie die zwei Vektorenpaare $\vec{F_s}$ und $\vec{s}$ sowie $\vec{s}$ und $(\vec{F} - \vec{F_s})$. Vergleichen und kontrastieren Sie jeweils die zwei Vektoren geometrisch und algebraisch für jede der gegebenen Skizzen A-D und tragen Sie Ihre Beobachtungen in die untenstehenden Tabellen ein. Begründen Sie Ihre Antworten.

	geometrischer Vergleich $\vec{F}_s$ vs. $\vec{s}$	**algebraischer Vergleich $\vec{F}_s$ vs. $\vec{s}$**
A		
B		
C		
D		

	geometrischer Vergleich $\vec{s}$ vs. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$	**algebraischer Vergleich $\vec{s}$ vs. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$**
A		
B		
C		
D		

Die folgenden beiden Relationen formalisieren die Beobachtungen aus der vorhergehenden Teilaufgabe:

i. $\vec{F}_s = \lambda \cdot \vec{s}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

ii. $(\vec{F} - \vec{F}_s)$ und $\vec{s}$ sind orthogonal, d.h. $\langle \vec{F} - \vec{F}_s,\, \vec{s} \rangle = 0$

Unter Verwendung dieser beider Relationen, möchten wir einen Ausdruck für $\vec{F}_s$ finden, der nur von $\vec{s}$ und $\vec{F}$ abhängt. Bringen Sie die folgenden Aussagen in die richtige Reihenfolge, um eine formal korrekte Herleitung dieses Ausdrucks zu erhalten. Nehmen Sie dabei an, dass $\vec{s} \neq \vec{0}$ gilt.

a. $\vec{F}_s = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle} \vec{s}$

b. $\langle \vec{F} - \lambda \vec{s}, \vec{s} \rangle = 0$

c. $\vec{F}_s = \lambda \vec{s}$

d. $\lambda = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{\langle \vec{s}, \vec{s} \rangle}$

e. $\langle \vec{F} - \vec{F}_s, \vec{s} \rangle = 0$

f. $\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle - \lambda \langle \vec{s}, \vec{s} \rangle = 0$

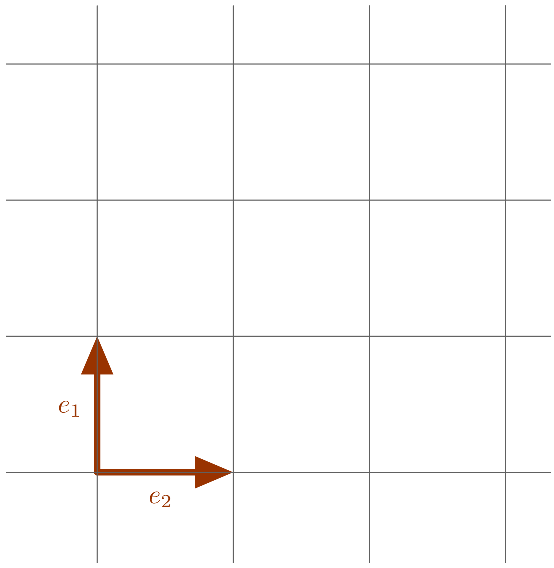
2. In der folgenden Aufgabe möchten wir den Ausdruck, welchen Sie in der vorhergehenden Aufgabe erhalten haben, verallgemeinern. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ definieren wir dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ u &\longmapsto \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Betrachten Sie die Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die im untenstehenden Koordinatensystem eingezeichnet sind.



(a) Betrachten Sie den Vektor

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und zeichnen Sie w ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Drücken Sie w als eine Linearkombination von e_1 und e_2 aus. Erläutern Sie die geometrische Interpretation dieser Linearkombination mit Hilfe der Skizze.

(b) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{e_1}(w)$ und $\Pi_{e_2}(w)$. Zeichnen Sie diese Vektoren ebenfalls in das Koordinatensystem ein. Was scheint die geometrische Interpretation dieser Vektoren zu sein? Begründen Sie Ihre Antwort. Drücken Sie w als Linearkombination von $\Pi_{e_1}(w)$ und $\Pi_{e_2}(w)$ aus.

(c) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben (a) und (b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe (a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. In der folgenden Aufgabe möchten wir die Abbildung von Aufgabe 2 für den Vektorraum $\mathcal{P}_1$ untersuchen. Wir betrachten für $p \in \mathcal{P}_1$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathcal{P}_1 &\longrightarrow \mathcal{P}_1 \\ q &\longmapsto \frac{\langle q, p\rangle}{\langle p, p\rangle} p, \end{aligned}$$

wobei $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ das folgende Skalarprodukt des Vektorraumes $\mathcal{P}_1$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\longmapsto \langle q, p\rangle := \int_0^1 q(x)p(x)dx \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Polynome

$$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} \text{ und } s(x) = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}.$$

(a) Drücken Sie s als Linearkombination von p_1 und p_2 aus.

(b) Berechnen Sie die Vektoren $\Pi_{p_1}(s)$ und $\Pi_{p_2}(s)$. Drücken Sie s als Linearkombination von $\Pi_{p_1}(s)$ und $\Pi_{p_2}(s)$ aus.

(c) Vergleichen und kontrastieren Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben (a) und (b). Was fällt Ihnen auf? Sehen Sie eine Möglichkeit, die Skalare in der Linearkombination von Teilaufgabe (a) mit Hilfe von Skalarprodukten zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.

D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2020

Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 2

Die Aufgaben 1–3 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 6. März um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(a) $(1, -2, 1)^\top$.

(b) $(0, 1, 1)^\top$.

(c) $(-2, 1, 1)^\top$.

(d) $(0, 3, 2)^\top$.

(e) $(1, 1, 1)^\top$.

2. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

(a) -1.

(b) 1.

(c) i.

(d) $-i$.

(e) $1 - i$.

3. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}3} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}2} & e^{-\frac{2\pi i}{3}4} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}3} & e^{-\frac{2\pi i}{3}6} & e^{-\frac{2\pi i}{3}9} \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

(a) A_1.

(b) A_2.

(c) A_3.

(d) A_4.

(e) Keine.

4. Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$, **b)** $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Geben Sie in MATLAB die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein.

a) Berechnen Sie mit MATLAB die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

   Hinweis: `[V,D] = eig(A)` gibt die Eigenwerte in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1}, A^2 und A^3. Was stellen Sie fest?

c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$–Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:

   i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k $(k \in \mathbb{N})$ und x ein zugehöriger Eigenvektor.

   ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

6. Für den skizzierten elektrischen Vierpol gilt zwischen Ein- und Ausgang die Beziehung

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

mit der Kettenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_2} & R_3 \\ \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1 R_2} & \frac{R_1+R_3}{R_1} \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A. Für welche Werte von $\frac{U_1}{I_1}$ hat man (bei beliebigem $I_1 \neq 0$) Widerstandsanpassung

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}?$$