Serie 3 - Bonusaufgabe

Die Abgabe der Bonusaufgabe erfolgt am **Freitag, den 6. März** in der Übungsstunde. Eine verspätete Abgabe ist nicht möglich.
Diese Bonusaufgabe wird mit 0 oder 1 Punkt bewertet, wobei 1 Punkt vergeben wird, wenn die Bonusaufgabe sinnvoll und umfassend bearbeitet wurde.

---

1. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst. Kann man daraus folgern, dass λx ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass

$$A(\lambda x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$ und $u \in \mathbb{R}^3$ existieren, welche die linearen Gleichungssysteme

$$Aw = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ respektive } Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Kann man daraus folgern, dass $w + u$ ebenfalls eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist, also dass

$$A(w + u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Lösungsmenge

$$K_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Av = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge K_1.

i. Liegt der Vektor

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in K_1? Begründen Sie.

ii. Liegt der Vektor

$$t = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

in K_1? Begründen Sie.

iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in K_1 liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie nun die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge

$$K_2 = \left\{ x \in \ \mathbb{R}^3 \ \middle| \ F(x) = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen K_1 und K_2. Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Betrachten Sie wiederum die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Av = w$ löst. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Au = \lambda w$ löst, für $\lambda \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Vektoren $v_1 \in \mathbb{R}^3$ und $v_2 \in \mathbb{R}^3$ existieren, welche die linearen Gleichungssysteme $Av_1 = w_1$ respektive $Av_2 = w_2$ lösen. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das lineare Gleichungssystem $Ax = w_1 + w_2$ löst? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die Menge

$$I_1 = \left\{ w \in \ \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \exists \ v \in \mathbb{R}^3 : \ Av = w \right\}.$$

Welche Eigenschaften hat diese Menge? Beantworten Sie ausserdem die folgenden Fragen zur Menge I_1.

i. Liegt der Vektor

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in I_1? Begründen Sie.

ii. Liegt der Vektor

$$t = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in I_1? Begründen Sie.

iii. Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in I_1 liegt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel und begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Bilden die Vektoren Av_1, Av_2 und Av_3 auch eine Basis des $\mathbb{R}^2$? Bilden die Vektoren Av_1, Av_2 und Av_3 eine Basis von I_1? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Betrachten Sie wiederum die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto Ax. \end{aligned}$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge $I_2 = \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^3 : \; F(x) = \; w \}$. Vergleichen und kontrastieren Sie die Mengen I_1 und I_2. Was beobachten Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Mengen

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad I = \{ w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^2 : Bv = w \}.$$

(a) Liegt der Vektor

$$s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in K? Begründen Sie.

(b) Liegt der Vektor

$$s = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in I? Begründen Sie.

(c) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Bilden die Vektoren Bv_1 und Bv_2 auch eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden die Vektoren Bv_1 und Bv_2 eine Basis von I? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (a) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Gv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ den Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Ist es möglich, dass die Menge $I = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, v \in \mathbb{R}^3 : \; Gv = w \right\}$ alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Hv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ den Vektor } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als einziges Element enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$I = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists\, v \in \mathbb{R}^2 : \; Hv = w \right\}$$

alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

D-MAVT | Lineare Algebra II | FS 2019
Prof. Dr. N. Hungerbühler

Serie 3

Die Aufgaben 1–6 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 13. März um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Die Norm $\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = |x| + |y|$ wird von einem Skalarprodukt induziert.

(a) richtig

(b) falsch

2. $\langle a, b \rangle := ab$ ist ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

(a) richtig

(b) falsch

3. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

(a) richtig

(b) falsch

4. Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

(a) richtig

(b) falsch

5. Die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1+(nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ konvergiert bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^\infty}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$.

(a) richtig

(b) falsch

6. Der Betrag $|\cdot|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}$.

(a) richtig

(b) falsch

7. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $D = \operatorname{diag}(2, \frac{1}{3})$. Wir definieren $\langle x, y\rangle := x^\top D y$ für $x, y \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ in V ein Skalarprodukt definiert.

b) Wie sieht die durch $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ induzierte Norm $\|\cdot\|$ aus?

c) Berechnen Sie die Norm von $x = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8. Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ und α_n, $\beta_m > 0$ im Vektorraum $V = C^0([0, 2\pi])$, den wir mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

ausstatten.

a) Man rechne nach, dass je zwei verschiedene Funktionen aus dieser Menge orthogonal sind.

b) Wie sind α_n und β_m zu wählen, damit alle Funktionen aus dieser Menge die Norm 1 haben?

Hinweis: Verwenden Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten:

$$\begin{aligned} \sin u\,\sin v &= \frac{1}{2}\left(\cos(u-v) - \cos(u+v)\right) \\ \cos u\,\cos v &= \frac{1}{2}\left(\cos(u-v) + \cos(u+v)\right) \\ \sin u\,\cos v &= \frac{1}{2}\left(\sin(u-v) + \sin(u+v)\right) \end{aligned}$$

9.

a) Sei $\|\cdot\|$ eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm. Man rechne nach, dass dann die Parallelogrammregel gilt:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

b) Man verifiziere, dass die Maximumsnorm

$$\|f\|_{L^\infty} := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

auf $C^0([a, b])$ die Axiome einer Norm erfüllt.

c) Auf dem Vektorraum der Polynome definiert

$$\langle P, Q\rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt. Bestimmen Sie ein Polynom zweiten Grades, das senkrecht auf $P_0(x) = 1$ und $P_1(x) = x$ steht.