Serie 4

Die Aufgaben 1–6 sind online zu lösen. Schicken Sie Ihre Lösung bis spätestens **Freitag, den 20. März um 14:00 Uhr** ab.
Die schriftlichen Aufgaben können Sie am selben Tag in Ihrer Übungsstunde abgeben oder im entsprechenden Fach im **HG J 68**.

---

1. Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

(a) richtig

(b) falsch

2. $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

(a) richtig

(b) falsch

3. Falls sich die Graphen zweier Funktionen f und g senkrecht schneiden, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

(a) richtig

(b) falsch

4. Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Fuktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$.

(a) richtig

(b) falsch

5. In einem Vektorraum mit Skalarprodukt können zwei Einheitsvektoren ein beliebig grosses Skalarprodukt haben.

(a) richtig

(b) falsch

6. In jedem Vektorraum mit Skalarprodukt können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren finden.

(a) richtig

(b) falsch

7.

a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine orthonormale Basis $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$. Benützen Sie das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$, d.h.

$$v = x_1 b^{(1)} + x_2 b^{(2)} + x_3 b^{(3)}.$$

8. Gegeben seien die drei Vektoren $p^{(1)} = x^2$, $p^{(2)} = x$, $p^{(3)} = 1$ in $\mathcal{P}_2$. Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ eine orthonormale Basis $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $q^{(3)}$ (respektieren Sie die Reihenfolge!). Benützen Sie als Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx, \ \text{ für } f, g \in \mathcal{P}_2.$$

9.

a) Gegeben seien die Funktionen $f_n(x) := \alpha_n \cos(nx)$ und $g_m(x) := \beta_m \sin(mx)$ für $m, n \in \mathbb{N}_0, m \geq 1$ und $\alpha_n, \beta_m > 0$ wie in Aufgabe 8 der Serie 3, im Vektorraum $C^0([0, 2\pi])$. Man berechne für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Orthogonalprojektion der Funktion

$$\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \pi$$

auf den von $\{f_0, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_k\}$ aufgespannten Unterraum, versehen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$. Die Aufgabe darf mit Matlab gelöst werden.

b) Man stelle mit Hilfe von Matlab die Funktion ϕ, sowie die gefundenen Projektionen für einige Werte von k als Graphen im selben Koordinatensystem dar.

Bemerkung: Die gefundenen Projektionen heissen Fourier-Polynome der Funktion ϕ. Für $k \to \infty$ erhält man die sogenannte Fourier-Reihe von ϕ.