D-INFK Analysis I FS 2020

Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Clicker Fragen

Montag, 20.04.2020

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

$\checkmark$ (c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

$\checkmark$ (d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig. Das ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

2. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Die Folge ist monoton wachsend.

Richtig. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n+1)}{(n+2)n^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+2n^2} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$.

(b) Die Folge ist beschränkt.

Falsch. Für alle $n \geq 1$ gilt $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ und damit

$$a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n\frac{n}{n+1} \geq \frac{3}{4}n.$$

Also ist (a_n) unbeschränkt.

√ (c) Die Folge ist divergent.

Richtig. Aus der Abschätzung $a_n \geq \frac{3}{4}n$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt und dass folglich (a_n) divergent ist.

3. Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

√ (a) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Richtig. Dies folgt z.B. daraus, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

(b) Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Dann ist nämlich $(a_{n+1} - a_n = 1/(n+1))$ eine Nullfolge, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

√ (c) Jede beschränkte Folge hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

Richtig. Der Satz von Bolzano-Weierstrass sagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Durch Weglassen der ersten Glieder dieser Teilfolge erhält man unendlich viele konvergente Teilfolgen.

4. Betrachte die Folge

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Welche Aussage stimmt?

(a) Die Folge konvergiert.

Nein, da die Folge unbeschränkt ist.

$\surd$ (b) Die Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Ja, die Folge $b_n := a_{2n+1}$ zum Beispiel.

$\surd$ (c) Die Folge hat zwei verschiedene konvergente Teilfolgen.

Ja, z.B. $b_n := a_{2n+1}$ und $c_n := a_{4n+1}$.

$\surd$ (d) Die Folge ist nach unten beschränkt.

Durch Null z.B.

(e) Die Folge ist beschränkt.

Nein, da sie nach oben unbeschränkt ist.

5. Sei $q > 0$. Betrachten Sie die Folge $a_n = q^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dann gilt:

√ (a) falls $0 < q < 1$, konvergiert a_n gegen 0.

Die Folge $n \mapsto q^n$ konvergiert gegen 0 und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also konvergiert das Produkt $e \cdot 0 = 0$.

(b) falls $0 < q < 1$, konvergiert a_n gegen e.

Die Folge $n \mapsto q^n$ konvergiert nach 0 und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also konvergiert das Produkt gegen $e \cdot 0 = 0$.

(c) falls $q > 1$, konvergiert a_n gegen e.

Die Folge $n \mapsto q^n$ ist divergent und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also ist das Produkt divergent.

√ (d) divergiert falls $q > 1$.

Die Folge $n \mapsto q^n$ ist divergent und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also ist das Produkt divergent.

√ (e) falls $q < 1$, ist a_n beschränkt.

Die Folge ist nach 0 konvergent, also bechränkt.

6. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei H die Menge ihrer konvergente Teilfolgen.

(a) Es immer gilt $H \neq \emptyset$.

Gegenbeispiel: $a_n = n$ hat keine konvergente Teilfolge.

(b) Falls (a_n) unbeschränkt ist, gilt $H = \emptyset$.

Gegenbeispiel:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1/n & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Diese Folge ist unbeschränkt weil die ungeraden Glieder nach $+\infty$ divergieren aber die Teilfolge (a_{2n}) ist eine Konvergente Teilfolge.

√ (c) Falls $(a_n)_n$ beschränkt ist, ist $H \neq \emptyset$.

Das ist der Satz von Bolzano-Weierstrass.

(d) Falls $(a_n)_n$ unbeschränkt ist, ist H immer endlich.

Gegenbeispiel: die Folge $(a_n)_n$ definiert durch

$$\begin{array}{llllcrrrr} 1, & & & & \qquad & & & & a_1, \\ 1, & 2, & & & & & & a_2, & a_3, \\ 1, & 2, & 3, & & & & a_3, & a_4, & a_5 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, \\ \dots & & & & & & & & \dots \end{array}$$

ist so, dass jede natürliche Zahl ist der Grenzwert einer Teilfolge.

7. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

√ (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

Siehe Notizen 11.03.2020, Seite 14

(b) $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Die harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

(c) ($a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hier ist ein Gegenbeispiel: Sei $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gegen 0 und $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Allerdings divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die Aussage wird richtig, wenn wir zusätzlich annehmen, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ Die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend.

Die alternierende harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

8. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}: \; a_k \leq 0$. Die Reihe konvergiert...

√ (a) ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.

(b) ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.

(c) ..., falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \geq n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

Hier ist die Folge der Partialsummen monoton fallend. Ist sie zusätzlich noch nach unten beschränkt, dann ist sie konvergent.

9. Aus dem Cauchy-Kriterium folgt, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq m \geq N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon$$

gilt.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Aus dem Cauchy-Kriterium folgt die Abschätzung $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ mit m, n, ϵ wie oben. Die Aussage oben ist jedoch falsch, die alternierende harmonische Reihe bildet ein Gegenbeispiel.

10. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

Dies stimmt zwar, folgt aber nicht aus dem Quotientenkriterium, da der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder gegen Eins strebt.

(b) "Die Reihe divergiert"

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen Eins.

√ (c) Nichts.

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen Eins.

11. Der Wert von $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\pi}{4}i\right)^n\frac{1}{n!}$ ist:

(a) $1+i$.

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

(c) $-1+i$.

√ (d) $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

(e) Keine der Aussagen trifft zu.

Die Reihe ist die Exponentialreihe bei $z=\frac{3\pi}{4}i$ ausgewertet:

$$\operatorname{Exp}\left(\frac{3\pi}{4}i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3\pi}{4}i\right)^n\frac{1}{n!}$$

Bekanntlich gilt $\operatorname{Exp}(i\alpha)=\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$, also

$$\operatorname{Exp}\left(\frac{3\pi}{4}i\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

12. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das folgt direkt aus dem Wurzelkriterium:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|})}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

13. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n$ ist auf dem Rand ihres Konvergenzkreises

√ (a) überall absolut konvergent.

(b) überall konvergent, aber nicht überall absolut konvergent.

(c) überall konvergent ausser in endlich vielen Punkten.

(d) nirgendwo konvergent.

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}} \middle/ \frac{2^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \right)$ $= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{n})^{3/2} \right) = \frac{1}{2}$. Für $|z| = \frac{1}{2}$ ist $\left| \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n \right| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert absolut. Also ist (a) richtig.

14. Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x/n) + 1.$$

Welche der Aussagen gilt?

√ (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Richtig. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(x/n) + 1 = 1$.

(b) Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch. Aus $|f_n(x) - 1| = x/n$ folgt, dass für $x > 2n$ auch $|f_n(x) - 1| > 2$ ist. Also kann (f_n) nicht gleichmässig konvergiern.

√ (c) Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Richtig. Es gilt $|f_n(x) - 1| = x/n \leq M/n$ für alle $x \in [0, M]$. Es folgt, dass $(f_n|_{[0,M]})$ gleichmässig konvergiert.

15. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur an den Punkten 0 und 1 verschwindet. Dann:

(a) ist f monotone in $(-\infty, 0]$

Gegenbeispiel

$$f(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{falls } x \leq -3/2, \\ -2-x & \text{falls } -3/2 \leq x \leq -1 \\ x & \text{falls } -1 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{falls } x \geq 1/2 \end{cases}$$

(b) ist es möglich, dass f in$(1, \infty)$ ihr Vorzeichnen ändert.

Falsch: Falls $x, y \in (1, \infty)$ existieren, so dass $f(x) > 0$ und $f(y) < 0$ gilt, muss nach dem Zwischenwertsatz ein $z \in (x, y)$ existieren, so dass $f(z) = 0$ gilt. Das widerspricht der Tatsache, dass f nur in 0 und 1 verschwindet.

√ (c) ist das Vorzeichnen von f konstant in $(0, \infty)$

Richtig: das folgt aus der oben Begründung.

16. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige, monotone fallende Funktion mit $f(0) = 1$ und $f(1) = -1$. Dann besitzt f genau eine Nullstelle in $[0, 1]$.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Sei

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1/3, \\ \ \ 0 & \text{falls } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ -3x+2 & \text{falls } 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

17. Sei $f : (0, 1] \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f ihr Maximum und Minimum an.

(a) Wahr

Sei $f(x) = x$. f nimmt ihr Maximum an aber nicht Ihr Minimum

$\surd$ (b) Falsch

18. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$. Dann

$\surd$ (a) existieren $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, so dass

$|f(x) - 1| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Richtig: der Satz besagt, dass eine Folge $(x_n)_n$ existiert, so dass $\lim f(x_n) \neq 1$. Die Definition vome Grenzwert mit Folgen lautet:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \text{für jede Folge } (x_n)_n \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{gilt} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$$

also ist ihre Negation:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1 \Leftrightarrow \text{es existiert eine Folge } (x_n)_n \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{sodass} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$$

(b) existieren für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$

Falsch:ein Gegenbeispiel ist gegeben durch die konstante Funktion $f(x) = 2$ und $\epsilon = 3$.

(c) für jede Folge $(x_n)_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $\lim x_n = 0$, gilt $\lim f(x_n) \neq 1$.

Falsch: ein Gegenspiel ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

weil für jede Folge rationaler Zahlen $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $\lim f(x_n) = 1$ aber exitiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht.

19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher dass $\lim_{x\to\pi} f(x) = 2$?

√ (a) $\lim_{x\to\pi} f(x)\cos x = -2$

Richtig: Die Funktion $\cos x$ ist an der Stelle π stetig und $\cos\pi = -1$ also existiert $\lim_{x\to\pi} f(x)\cos x$ genau dann, wenn $\lim_{x\to\pi} f(x)$ existiert, und muss

$$\lim_{x\to\pi} f(x)\cos x = (-1)\lim_{x\to\pi} f(x)$$

sein.

(b) $\forall\epsilon > 0, \exists N \geq 1$, so dass $\forall n \geq N : |f(\pi + 1/n) + 2| < \epsilon$

(c) $\lim_{n\to\infty} f(\pi + 1/n) = 2$

Die zwei letzte Aussagen sind falsch: das zeigt nur, dass für die Folge $x_n = \pi + 1/n$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$ gilt; die Definition vom Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert π hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

20. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$

√ (a) Es ist möglich dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -2$

Bsp: $f(x) = x$ und

$$g(x) = \begin{cases} -2x & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

√ (b) Es ist möglich dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Bsp: $f(x) = x^2$ und

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(c) Es ist möglich dass $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Es gibt ein $K > 0$, so dass $f(x) \geq 1$ und $g(x) \leq -1$ für alle $x \geq K$. Insbesondere gilt für alle $x > K$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

Somit ist $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ nicht möglich.