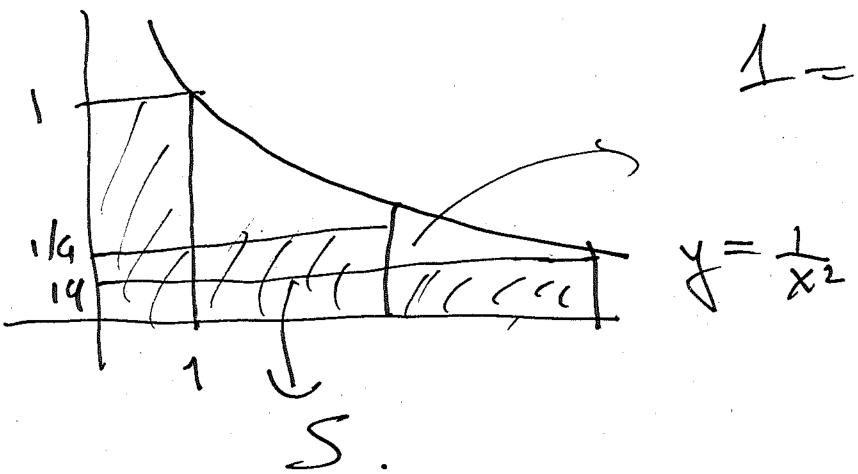
0

Analysis I

webseite
https://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-0212-16L/

Skript von Marc Burger.

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = ?$$



1 = Fläche.

$S = 1 + \frac{1}{4} + \cdots > 1$

$1 + 1 > S.$

$\Rightarrow 1 < S < 2.$

§1. Reelle Zahlen, Euklidische Räume Komplexe Zahlen.

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$.

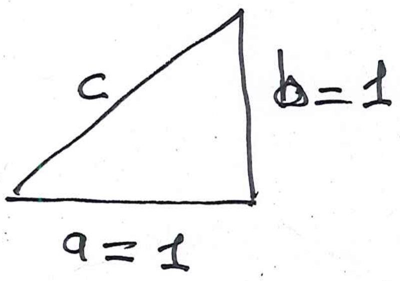
Man kann die Gleichung $x+1=0$ in $\mathbb{N}$ nicht lösen.

$\mathbb{Z} := \{\dots -2, -1, 0, 1, \dots\}$.

Die Gleichung $2x+3=0$, hat in $\mathbb{Z}$ kein Lösung.

$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

$\forall r \in \mathbb{Q}, r \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung $r = \frac{p}{q}$ mit $q > 0$ und p und q teilfremd.



$$a^2 + b^2 = \boxed{c^2 = 2}$$

in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

Die Menge $\mathbb{R}$ ist mit 2 Operationen versehen:

Addition $\quad + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

Multiplikation $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y.$$

(M)

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

Regeln der Addition (Abelsche Gruppe)

A.i) Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x+(y+z)=(x+y)+z$

A.ii) Neutrales Element: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: x+0=x$

A.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x+y=0$ → y ist eindeutig bestimmt und wird mit $-x$ bezeichnet

A.iv) Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x+y=y+x$

Regeln der Multiplikation

M.i) Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

M.ii) Neutrales Element: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}: x\cdot 1=x$

M.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \; \exists y \in \mathbb{R}: x\cdot y=1$ → y ist eindeutig bestimmt und wird mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ bezeichnet.

M.iv) Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x\cdot y=y\cdot x$

Distributivitäts-Gesetz

D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

$\mathbb{R}$ ist ein Körper.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (bezüglich der Multiplikation) ist eine abelsche Gruppe.

Weitere Axiome für $\mathbb{R}$.

Es gibt auf $\mathbb{R}$ eine Ordnung $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften

Ordnungseigenschaften

O.i) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x$

O.ii) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O.iii) Identivität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O.iv) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ oder $y \leq x$.

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation

K.i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K.ii) : $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0,$ gilt $x \cdot y \geq 0$

$\mathbb{R}$, ist ein <u>angeordneter Körper.</u>

Aber $\mathbb{Q}$ bildet auch einen ang. Körper.

Was $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet ist, die

V <u>Ordnungsvollständigkeit.</u>

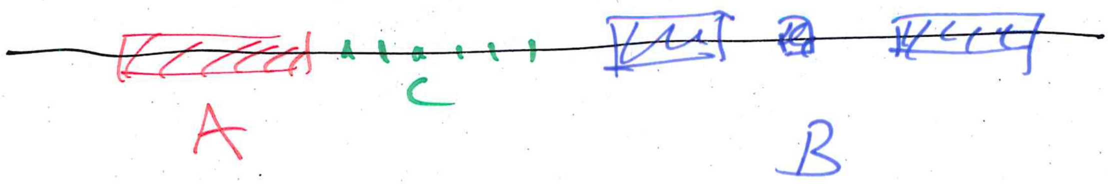
Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$ so dass

i) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$

Dann gibt es (mindestens) $c \in \mathbb{R}$ mit

$\forall a \in A : a \leq c$ und $\forall b \in B$ $c \leq b$



<u>Satz 1.1.2</u> $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer angeordneter Körper, der Ordnung-vollstendig ist.

Notation $a > b$ bezeichnet

$a \geq b$ und $a \neq b$.

Folgerungen der Axiome.

Kor 1.1.6.

1) Die additiven und Multiplikativen Inverse sind eindeutig bestimmt.

2) $0 \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $-1 \cdot x = -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   Insbesondere $(-1)^2 = 1$.

4) $y \geq 0 \Longleftrightarrow -y \leq 0$

5) $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Insbesondere $1 = 1 \cdot 1 \geq 0$.

6) $x \leq y$ und $u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$

7) $0 \leq x \leq y$ und $0 \leq u \leq v$

   $\Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$.

Beweis 1) Sei $x \in \mathbb{R}$ gegeben, mit y und z, zwei additiven Inversen.

z.z: $y = z$

Da y und z inversen von x sind, gelten $x + z = 0$ und $x + y = 0$

$$y \underset{A2}{=} y + 0 = y + (x+z) \underset{A1}{=} (y+x) + z$$
$$= 0 + z = z. \quad \square$$

3) $x + (-1)\cdot x = 1\cdot x + (-1)\cdot x$
$= (1 + (-1))\cdot x = 0\cdot x = 0.$

Eindeutigkeit der add. Inv. $\Rightarrow$ $(-1)\cdot x = -x$

(4) z.z. $y \geq 0 \Leftrightarrow (-y) \leq 0$

$$y \geq 0 \overset{K1}{\Rightarrow} \underbrace{y + (-y)}_{0.} \geq 0 + (-y) = -y.$$

5) z.z.z. $y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

Falls $y \geq 0$, folgt aus K2: $y^2 = y \cdot y \geq 0 \cdot 0 = 0$

Falls $y \leq 0 \underset{(4)}{\Rightarrow} -y \geq 0$ und somit $(-y)^2 \geq 0.$

$\square$

Kor 1.1.7 (Archimedisches Prinzip)

1) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$
Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq n x$

2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$

Beweis: (1) Sei $r := y x^{-1}$
Wir möchten zeigen dass es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $r \leq n$.
Wir machen ein Widerspruchbeweis;
Wir nehmen an dass $\forall m \in \mathbb{N}$ $m \leq r$
Sei $A = \mathbb{N}$
$B = \{ y \in \mathbb{R} \mid m \leq y \ \forall m \in \mathbb{N} \}$.
Per annahme $r \in B$, d.h $B \neq \emptyset$
Offensichtlich $A \neq \emptyset$.
Per annahme, gilt auch dass
$\forall a \in A = \mathbb{N}$ und $\forall b \in B$; $a \leq b$.
Aus (V)ollstendigkeits folgt

9

$\exists c \in \mathbb{R}$ mit (i) $m \leq c \quad \forall m \in A = \mathbb{N}$

(ii) $c \leq y \quad \forall y \in B$

Aus (i) folgt dass $m+1 \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$

d.h $m \leq c-1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

d.h $c-1 \in \mathbb{B}$

dann folgt aus (ii) dass $c \leq c-1$

ein Widerspruch $\lightning$

2) Sehen Sie: Skript von Einsiedler, Jossen, Wieser Analysis I und II Satz 2.68

Nochmals auf English!

z.z.

$r \in \mathbb{R}$, w.t.s. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ s.t $r \leq n$.

Assume on the contrary that

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m \leq r$

$A = \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$

$B = \{ r \in \mathbb{R} \mid m \leq r \;\; \forall m \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$

By defn of the sets A and B, we also have that $\forall m \in A, \forall r \in B$, $m \leq r$.

(V)ollständigkeit $\Rightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ mit

(i) $m \leq c \quad \forall m \in A = \mathbb{N}$

(ii) $c \leq y. \quad \forall y \in B$

$m+1 \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow m \leq c-1 \;\; \forall m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow c-1 \in B.$

(ii) $\Rightarrow$ $c \leq c-1$ since $c-1 \in B$. ↯

Wichtige Folgerung des (V).

Lemma

Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $c^2 = 2$.

Beweis: $A := \{a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq a \leq 2,\ a^2 < 2\}$

$B := \{b \in \mathbb{R} \mid 1 \leq b \leq 2,\ b^2 \geq 2\}$.

Dann gelten (i) $1 \in A$, d.h. $A \neq \emptyset$

$2 \in B$, d.h. $B \neq \emptyset$

(ii) $\forall a \in A,\ \forall b \in B:\ a < b$

Beweis: Falls $a \geq b \Rightarrow a \cdot a \geq b \cdot b$.

$\Rightarrow a^2 \geq b^2 \geq 2$ $\lightning$ $(a < 2)$

Nach (V) es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit

$a \leq c\ \ \forall a \in A$ und $c \leq b\ \ \forall b \in B$.

Insbesondere folgt dass $1 \leq c \leq 2$.

Wir zeigen dass $c^2 = 2$!

Andernfalls gilt nach O(iv) entweder

a) $c^2 < 2$ oder b) $c^2 > 2$

Im Fall a), da $c^2 < 2$ ist, gibt es ε,

$0 < \varepsilon \leq 1/5$ mit $c^2 = 2 - 5\varepsilon$

$a := c + \varepsilon > c$

Dann für diese a, erhalten wir

$$a^2 = (c+\varepsilon)^2 = c^2 + 2\varepsilon c + \varepsilon^2 < c^2 + 2\varepsilon \cdot 2 + \varepsilon.$$

$c < 2$

$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{5}$

$a^2 < c^2 + 5\varepsilon = 2$

d.h. $a = c + \varepsilon \in A$.

aber $a = c + \varepsilon > c$. Diese ist im Widerspruch zur $(\forall a \in A, a \leq c)$.

im Fall b), $c^2 > 2$, gibt es ein Zahl ε,

$0 < \varepsilon < 2/5$ mit

$c^2 = 2 + 5\varepsilon$

Sei $b := c - \varepsilon$

zeige dass $b^2 > 2$ d.h $b \in B$

Nochmals ein Widerspruch zur $c \leq b \ \forall b \in B$.

$\Rightarrow$ d.h. $\boxed{c^2 = 2}$.

Satz 1.1.8. Für jedes $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Bemerkung: Für $t \geq 0$, gibt es genau eine Lösung von $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllen das (V)ollständigkeitsaxiom nicht!

Denn für
$$A := \{a \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq a \leq 2, \; a^2 < 2\}$$
$$B := \{b \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq b \leq 2 \; \; b^2 \geq 2\}$$
gibt es keine Zahl $c \in \mathbb{Q}$ mit $\forall a \in A$, $a \leq c$ und $\forall b \in B$ $c \leq b$.

Wenn die Zahl $c \in \mathbb{Q}$ existieren würde, dann würde es $c^2 = 2$ erfüllen.

Defn. 1.1.9. Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$

(2) $\min\{x, y\} := \begin{cases} y & \text{falls } y \leq x \\ x & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$

(3) Der **Absolutbetrag** einer Zahl $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 1.1.10 (i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bmk: $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis (iii)

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| \; |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

Satz 1.1.11 (Young'sche Ungleichung)

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

Beweis $\left(\sqrt{\varepsilon}|x| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|y|\right)^2 \geq 0$.

$\Rightarrow \varepsilon |x|^2 - 2|x||y| + \frac{1}{\varepsilon}|y|^2 \geq 0$.

$\Rightarrow \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2 \geq 2|xy|$ $\blacksquare$

Notation Wir führen noch ~~[illegible]~~ zwei Symbole ein, $-\infty$ und ∞ mit der Konvention $-\infty < x < \infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ein Intervall ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form.

1) Für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$.

	andere Notation.
$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a,b]$
$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a,b)$
$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a,b)

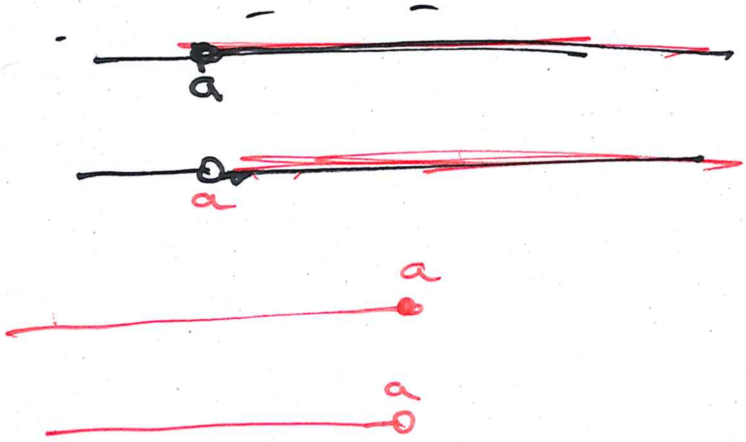
2) Für $a \in \mathbb{R}$.

$[a, +\infty[=$

$]a, +\infty[$

$]-\infty, a]$

$]-\infty, a[$



3) $]-\infty, \infty[= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Defn 1.1.2. Sei $A \subset \mathbb{R}$ Teilmenge.

(1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls $\forall a \in A : a \leq c$.

Die Menge A heisst nach oben (von oben) beschränkt, falls es eine obere Schranke von A gibt.