

Zusammenfassung

Satz (Vergleich Satz)

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen

mit $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k > k_0$

Dann gelten

- 1) $\sum b_k$ konvergent $\Rightarrow \sum a_k$ konvergent
- 2) $\sum a_k$ divergent $\Rightarrow \sum b_k$ divergent.

Bsp. 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Harmonische, div.

2) Geometrische Reihe, $q \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \text{konv} & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{div} & \text{falls } |q| \geq 1 \end{cases}$$

3) Telescope Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergent.

4) $\sum \frac{1}{k^2}$ ist konvergent
man kann mit $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ vergleichen.

5) $\sum \frac{1}{k^s}$ konvergent
falls $s \geq 2$

6) $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent
vergleichen mit $\sum \frac{1}{k}$.

7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergent
Vergleich mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$

Defn Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolute konvergenz falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Abs. konvergenz ist "stärker" als konvergenz

Satz Eine abs. konv. Reihe $\sum a_k$ ist auch konvergent.

d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist konvergent

$\Rightarrow \sum a_k$ ist konvergent.

$$|\sum a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Bsp $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = a_k$

$$\sum |a_k| = \sum \frac{1}{k(k+1)} \text{ ist konvergent}$$
$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} \text{ ist konvergent.}$$

$$\sum \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = 1 - \log 4.$$

Vorsicht!!!

$$\sum |a_k| \text{ konv} \Rightarrow \sum a_k \text{ konv.}$$

Aber

$$\sum a_k \text{ konv} \not\Rightarrow \sum |a_k| \text{ konv.}$$

Bsp. Alternierende Harmonische

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konv.

aber nicht abs. konv

Da $\sum \frac{1}{k}$ nicht konv. ist.

Satz (Leibniz) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$

mon. fallende Folge mit

$$a_n \geq 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

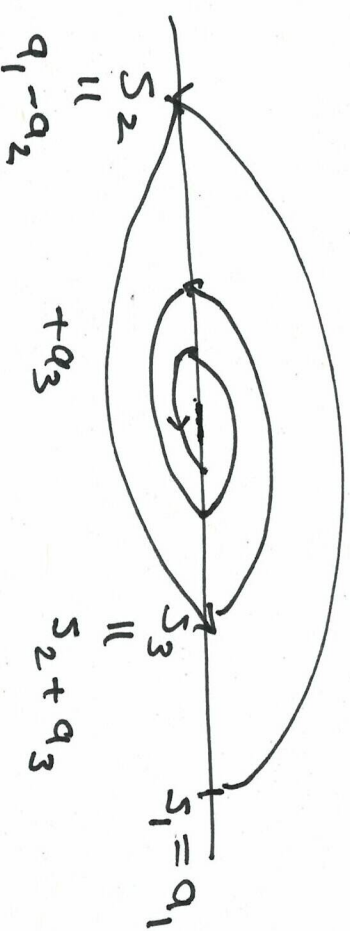
und es gilt für

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Beweis

$$-a_2$$



$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{> 0}$$

$$\Rightarrow S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \text{ ist mon. fallend.}$$

$$S_{2n} = S_{2n-2} + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{>0}$$

$$\Rightarrow S_{2n} \geq S_{2n-2}$$

$(S_{2n})_{n \geq 1}$ ist mon. wachsend.

$(S_n)_{n \geq 1}$ ist die Folge der Partialsummen.

Wir haben auch dass

$$\boxed{S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}} \quad (*)$$

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

$$a_1 - a_2 = S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1 = a_1$$

(S_{2n}) ist $\nearrow$ $(*)$ (S_{2n-1}) $\searrow$

$\Rightarrow$ Beide Monotone Folgen

$$(S_{2n})_{n \geq 1}, (S_{2n+1})_{n \geq 1}$$

sind beschränkt.

Nach monotone konv. Satz,
existieren der Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1}$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, (Auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$),

Aus $(*)$ folgt das

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = S$$

Daraus folgt dass $(S_n)_{n \geq 1}$
mit gleichen Grenzwert
konvergiert.

□.

Diese folgt aus

Lemma Sei $(s_n)_{n \geq 1}$ eine

beschränkte Folge. Sei

$(s_{2n})_{n \geq 1}$ die Teilfolge
der Folgenglieder mit
gerade Indizes und
 $(s_{2n+1})_{n \geq 0}$ die Teilfolge mit

ungerade Indizes.

Falls $\lim s_{2n}$ und $\lim s_{2n+1}$
existieren und $\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} \stackrel{=}{=} s$

so konvergieren (s_n) mit

$$\lim s_n = s,$$

Bmk Die alternierende
harmonische Reihe ist

konvergent.

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad a_k = \frac{1}{k}$$

a_k ist mon. fallend.

$$\lim a_k = 0.$$

Dann nach Satz von Leibniz
konvergiert $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Aber sie ist nicht
abs. konvergent!

~~A~~ Konvergent aber
nicht abs. konvergent

Reihe nennt man

bedingt konvergent (conditionally
convergent)

Bsp. Sei $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = a_1 - a_2 \leq S \leq a_1 = 1$$

Wir ändern nun die Reihenfolge
der Summanden wie folgt:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}_{1/6} - \frac{1}{8} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}_{1/10} \\ & - \frac{1}{12} + \underbrace{\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right)}_{1/14} - \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\right)$$

$$\frac{1}{2} S.$$

$$\Rightarrow S = \cancel{\frac{1}{2}} S \quad | \quad ??$$

Defn. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ ist

eine Umordnung der Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls es eine

bijektive Abbildung

$\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt so

dass $a_n' = a_{\phi(n)}$.

Satz (Dirichlet)

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abs. konvergiert,

dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

Bmk Dieser Satz wird

falsch, wenn man auf die

absolute Konvergenz verzichtet,

wie wir im vorherigen Bsp

der Umordnung von Alt. Hnm.

Reihe gesehen haben.

In der Tat, haben wir

Ein Satz von Riemann.

Satz (Riemann) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

eine konvergente, aber nicht abs. konv. Reihe. Dann

gibt es zu jedem

$A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine

Umordnung der Reihe, die

gegen A konvergiert.

Bmk Bei Abs. konvergenz

Reihen kann solche

„Pathologische verhältnis“

nicht auftreten.

Quotientenkriterium } stützt sich
Wurzelkriterium } ~~aus~~

auf den Vergleichssatz und die
Konvergenzbedingung für die
Geometrische Reihe.

Satz (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \forall n \geq 1$.

Falls $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$,

dann konvergiert die Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Falls $\liminf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, divergiert

die Reihe.

R_n Falls $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

existiert und

falls $L < 1$, so ist $\sum a_n$
abs. konv.

falls $L > 1$, so ist $\sum a_n$
divergent.

Falls $L = 1$, versagt das
Quotientenkriterium.

Beweis: Sei $c_n = \sup \left\{ \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| : k \geq n \right\}$.

$= \sup \left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right|, \dots \right\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Sei $\lim c_n = q_0 < 1$

$$\lim c_n = q_0 < q_1 < 1$$

Dann gilt für genügend
groß $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$

$$|c_n - q_0| < \varepsilon = q_1 - q_0.$$

insbesondere: $c_N < q_1$

Dann $\forall k \geq N : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q_1.$

Woraus folgt dass

$$|a_{k+1}| \leq q_1 |a_k| \quad \forall k \geq N$$

Woraus folgt: für $j \geq 1$

$$|a_{N+j}| \leq q_1 |a_{N+j-1}|$$

$$\leq q_1 q_1 |a_{N+j-2}|$$

$$\dots$$

$$\leq q_1^j |a_N| = q_1^j \frac{q_1^N}{q_N} |a_N|$$

$$= q_1^{N+j} \left| \frac{a_N}{q_N} \right|$$

Wir haben gezeigt dass $\forall n \geq N+1$

$$|a_n| \leq q_1^n \left| \frac{a_N}{q_N} \right| \quad \forall n \geq N+1$$

Wir können nun $b_n := q_1^n C$

mit $C = \left| \frac{a_N}{q_N} \right|$ setzen.

und Vergleichssatz benutzen
mit $b_n = Cq^n$

Da $q < 1$, ist die Reihe
 $\sum b_n = C \sum q^n$ konvergent.

Und $|a_n| \leq b_n$.

und Damit ist auch

$\sum |a_n|$ konvergent.

$\Rightarrow \sum a_n$ ist abs. konv.

Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergent.

Beweis: $a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \right|$$

$$= \left| (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)} \right|$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)} \right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Nach Quotientenkriterium abs

konvergent die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Insbesondere, haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Bsp Exponentialfunktion

für $z \in \mathbb{C}$, betrachte

die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Für $z \neq 0$ gilt: Sei $a_n := \frac{z^n}{n!}$

$$\text{Dann gilt: } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right|$$

$$= \frac{|z|}{n+1}$$

$$\text{Also gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1}$$

$$= |z| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$,
konvergiert die Reihe

$$\sum \frac{z^n}{n!} \quad \text{absolut!}$$

Wir definieren

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\text{Bsp. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = \exp(-2)$$

Bsp. Das Quotientenkriterium

versagt falls $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

z.B. 1) $a_n = \frac{1}{n^2}$. wir wissen schon dass

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

2) $a_n = \frac{1}{n}$. wir wissen schon dass

$\sum \frac{1}{n}$ divergiert.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n}{n+1} \right| \rightarrow 1.$$

Bsp. Für welche $z \in \mathbb{C}$

konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k k!}{k^k} \quad ?$$

$$a_k = \frac{z^k k!}{k^k}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{z^{k+1} (k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{z^k k!} \right|$$

$$= |z| \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \right)^k \rightarrow \frac{|z|}{e}.$$

Damit folgt dass die Reihe konv. für $|z| < e$ und für $|z| > e$.

Bsp. Sei $q \in \mathbb{C}$

$$|q| < 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k \quad a_k = k q^k$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(k+1) q^{k+1}}{k q^k} \right| = |q| \left| \frac{k+1}{k} \right|$$

$$\rightarrow |q| < 1.$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k q^k$ konvergiert
absolute.

~~Da~~ um die Summe dieser
Reihe zu berechnen, können
wir die Reihe wie folgt
umschreiben.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \dots$$

$$= q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

$$+ q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

$$+ q^3 + q^4 + \dots$$

$$+ q^4 + \dots$$

$$= q (1 + q + q^2 + \dots)$$

$$+ q^2 (1 + q + q^2 + \dots)$$

$$+ q^3 (1 + q + q^2 + \dots)$$

$$= q \left(\frac{1}{1-q} \right)$$

$$+ q^2 \left(\frac{1}{1-q} \right)$$

$$+ q^3 \left(\frac{1}{1-q} \right)$$

$\square$

$$\begin{aligned}
 z \left(\frac{b-1}{b} \right) &= \left(\frac{1}{b-1} \right) \left(\frac{b-1}{b} \right) = \\
 &= \frac{b-1}{b} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \dots \right)}_{=1} = 1
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^k = \frac{1}{1-q} (q + q^2 + q^3 + \dots)$$