Zusammenfassung

Satz (Leibniz). Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ und $\lim a_n = 0$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 \dots$$

un es gilt für $S = \sum (-1)^{k+1} a_k$

$$a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

Defn. Eine Reihe $\sum a_n'$ ist eine Umordnung der Reihe $\sum a_n$ falls es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $a_n' = a_{\phi(n)}$

Satz (Riemann) Sei $\sum a_n$ eine konv. aber nicht abs konv. Reihe. Dann gibt es zu jeden $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert.

Für abs. konv. Reihe haben wir

Satz (Dirichlet) Falls $\sum a_n$ abs. konvergiert dann konv. jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

Satz (Quotienten Kriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \neq 0$ $\forall n \geq 1$.

1) Falls $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ absolute

2) Falls $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, dann divergiert die Reihe $\sum a_n$.

Bsp. 1) $\sum \frac{n!}{n^n}$ konv, absolute.

da $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$

2) Exponential Funktion **

Sei $z \in \mathbb{C}$, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$ absolute.

$$\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Bsp. $\sum \frac{2^k}{k!} = \operatorname{Exp}(2)$

Bmk. Quotientenkriterium versagt, wenn unendlich viele a_k verschwinden oder falls

$$\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum \frac{1}{k^2} & \text{konv.} \\ \sum \frac{1}{k} & \text{div.} \end{array}\right\} \quad \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1.$$

Satz (Wurzelkriterium).
Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge.

1) Falls $\limsup \left(|a_n|^{1/n} \right) < 1$ dann konvergiert $\sum a_n$ abs.

2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$ dann divergieren $\sum |a_n|$ und $\sum a_n$.

Bmk Das Wurzelkriterium ist erfüllt falls $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < 1$ gilt.

Beweis

Sei $c_n := \sup \{ |a_k|^{1/k} : k \geq n \}$.

$\limsup |a_n|^{1/n} = \lim c_n$.

Sei $\limsup |a_n|^{1/n} = q_0 < 1$

d.h. $\lim c_n = q_0 < 1$

Sei $0 < q_0 < q < 1$

Sei $\varepsilon = q - q_0 > 0$

Dann gibt es $N \geq 1$ so dass $\forall n \geq N$;

$$|c_n - q_0| \leq \varepsilon = q - q_0$$

Insbesondere $c_N - q_0 < q - q_0$

d.h. $c_N < q$.

$c_N = \sup \{ |a_k|^{1/k} : k \geq N \}$

Dann folgt dass $\forall k \geq N$

$$|a_k|^{1/k} \leq c_N < q.$$

Woraus $|a_k| \leq q^k \quad \forall k \geq N$

folgt.

Die Aussage, dass $\sum a_k$ konv. abs., folgt dann aus dem Vergleichsatz angewendet auf die Geometrische Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} q^k$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist abs. konv. ∎

<u>Bsp.</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n + 2n^3}{6n^3 + 5} \right)^n$

$$|a_n|^{1/n} = \left| \left(\frac{5n + 2n^3}{6n^3 + 5} \right)^n \right|^{1/n} = \left| \frac{5n + 2n^3}{6n^3 + 5} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{n^3}\left(\cancel{\frac{5n}{n^3}}^{\to 0} + 2\right)}{\cancel{n^3}\left(6 + \cancel{\frac{5}{n^3}}^{\to 0}\right)} \right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ Die Reihe konv. abs.

<u>Defn.</u> Sei $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Die <u>Potenzreihe</u> in $z \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$P(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

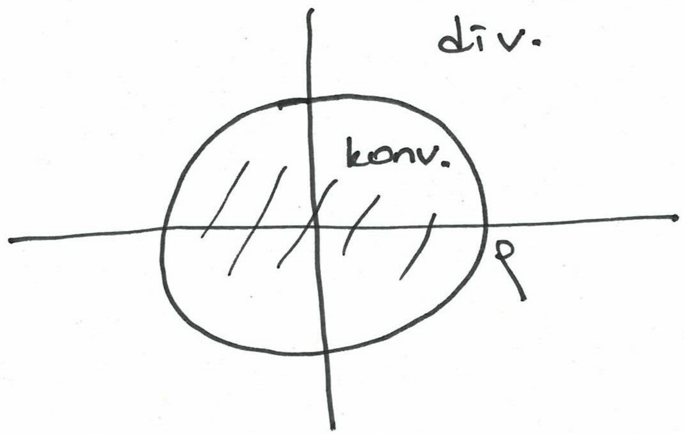
<u>Frage</u>: Wann ist eine Potenzreihe konvergent? Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $p(z)$?

<u>Satz</u> Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$

wobei $$\rho := \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0. \end{cases}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist divergent für alle $|z| > \rho$.

Bmk Die Konvergenzbereich von eine Potenzreihe, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$ ist ein Kreis



$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Beweis $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Sei $a_k := c_k z^k$

Dann ist

$$|a_k|^{1/k} = |c_k|^{1/k} |z|$$

$$\limsup |a_k|^{1/k} = \limsup |c_k|^{1/k} |z|$$
$$= |z| \limsup |c_k|^{1/k}.$$

Nach Wurzelkriterium

$\sum a_k$ konv. falls
$$|z| \limsup |c_k|^{1/k} < 1$$

und $\sum a_k$ div. falls
$$|z| \sup |c_k|^{1/k} > 1$$

Falls $\limsup |c_k|^{1/k} = 0$ ist

dann gilt

$|z| \limsup |c_k|^{1/k} < 1$ immer $\Rightarrow \sum c_k$ konv $\forall z$

Falls $\limsup |c_k|^{1/k} \neq 0$ ist

dann konvergiert die

$\sum c_k$ für $|z| < \frac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}}$.

<u>Konvention</u> 1) Falls $\{|c_k|^{1/k}, k \geq 1\}$ nicht beschränkt ist, setzen wir $\rho = 0$ ($|z| < \rho$, $|z| < 0$)

2) Falls $\{|c_k|^{1/k}, k \geq 1\}$ beschränkt ist und zudem $\limsup |c_k|^{1/k} = 0$,

setzen wir $\rho = \infty$

d.h. die Reihe

$p(z) = \sum c_k z^k$ konvergiert

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Falls $\{|c_k|^{1/k}, k \geq 1\}$ ~~ist~~ beschränkt ist und $\limsup |c_k|^{1/k} \neq 0$,

setzen wir $\rho := \frac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}}$.

und die Reihe

$p(z) = \sum c_k z^k$ konv.

für all $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$.

/7.

Bsp. (Riemann Zeta Funktion).

Für $s > 0$ betrachten wir die Reihe

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und wir fragen nach Konvergenz.

$$a_n = \frac{1}{n^s}$$

Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(1/n+1)^s}{1/n^s}\right|$

$$= \left|\frac{n}{n+1}\right|^s \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Wurzelkriterium $|a_n|^{1/n} = \left|\frac{1}{n^s}\right|^{1/n}$

$$= \cancel{\frac{1}{n^{1/n}}} = \frac{1}{(|n|^{1/n})^s} \to 1$$

Für $0 < s \leq 1$ gilt

$$\frac{1}{n^s} > \frac{1}{n}.$$

Also $\sum \frac{1}{n^s} > \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{Harmonische Reihe}}$

und somit $\zeta(s)$ ist divergent für $0 < s \leq 1$

Wir hatten für die Harmonische Reihe

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \geq 1 + 1 + \dots$$

Nun sei $s > 1$.

Wir segmentieren die Reihe auf die selbe Art.

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{<} + \dots$$

$$< 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

$$\leq 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \frac{\cancel{2}8}{8^s} + \dots$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{2^2}{2^{2s}} + \frac{2^3}{2^{3s}} + \dots$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{2^{2s-2}} + \frac{1}{2^{3s-3}} + \frac{1}{2^{4s-4}} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \dots$$

Die letzte Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \dots$$

ist die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2^{s-1}}$

Da $s > 1$, $|q| = \left|\frac{1}{2^{s-1}}\right| < 1$

Damit für $s > 1$, $\zeta(s)$ ist konvergent und

$$\zeta(s) < \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n}_{\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-1} - 1}$$

Multiplikation von Reihen

Frage: Wie funktioniert das Ausmultiplizieren von Reihen.

Für das Produkt von endlichen Summen gilt

$$(a_0 + \dots + a_m)(b_0 + \dots b_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell .$$

$$= a_0(b_0 + \dots + b_n) + a_1(b_0 + \dots + b_n) + \dots + a_n(b_0 + \dots + b_n)$$

$$= b_0(a_0 + \dots + a_m) + \dots + b_n(a_0 + \dots + a_m)$$

Frage ist wie können wir 2 Reihen multiplizieren?

und ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)$?

Nennen wir $a_k b_\ell =: c_{k\ell}$.

und betrachten $\sum_{\substack{k=0 \\ \ell=0}}^{\infty} c_{k\ell}$

$$c_{00} + c_{01} + c_{02} + \cdots = a_0(b_0 + b_1 + \cdots) =: s_0$$

$$c_{10} + c_{11} + c_{12} + \cdots = a_1(b_0 + b_1 + \cdots) =: s_1$$

$$\vdots$$

$$u_1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k.$$

$$u_0 = b_0(a_0 + a_1 + \cdots)$$

$$u_1 = b_1(a_0 + a_1 + \cdots).$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} u_\ell$$

?? Die Frage ist

ist $s_0 + s_1 + \cdots = u_0 + u_1 + \cdots$??

Im Allgemeinen sei eine Doppelfolge $(c_{kl})_{\substack{k \geq 0 \\ l \geq 0}}$

(c_{kl} muss nicht in der Form $a_k b_l$ sein).

Können wir die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \right) = s_0 + s_1 + \dots$$

oder die Summe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{kl} \right) = u_0 + u_1 + \dots$$

betrachten.

Bsp.

1	-1	0	0	.	.	.	.	.
0	1	-1	0	.	.	.	.	.
0	0	1	-1	0	.	.	.	

$1 + 0 + 0 + 0 \dots =$

$$\boxed{\sum_{l=0}^{\infty} u_l = \boxed{1}}$$

$$\begin{aligned} &+0 = s_0 \\ \hline &= 0 = s_1 \\ &= 0 = s_2 \end{aligned}$$

$$+\quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} s_k = 0.}$$

Bmk Wie diese Bsp zeigt, können beide Summe $s_0 + s_1 + \cdots$ und $u_0 + u_1 + \cdots$ konvergent sein mit verschiedenen Grenzwert.

Defn. $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine <u>lineare Anordnung</u> der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} c_{ij}$ falls es eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = c_{\phi(k)}$.

Satz (Cauchy) Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt so dass

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |c_{ij}| \leq B \quad \forall m \geq 0.$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

und

$$U_j := \sum_{i=0}^{\infty} c_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

sowie $\sum_{i=0}^{\infty} S_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} U_j$ und gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j.$$

Zudem konvergiert jede lineare Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert.

Wir möchten $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ multiplizieren.

$$\begin{array}{ccccc}
a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots & - \\
a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdot & - \\
a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdot & - \\
a_3 b_0 & a_3 b_1 & | & & \\
| & | & | & & |
\end{array}$$

Defn Das Cauchy Produkt der Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j \quad \text{ist die}$$

Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + b_1 a_1 + a_2 b_0) + \cdots$$

Vorsichtig!! Das Cauchy Produkt muss nicht immer konvergieren!!

Bsp. Betrachte die Folge $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = a_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist konvergent nach Leibniz Satz.

aber sie ist nicht abs. konv.

Als b_k nehmen wir auch a_k

Dann divergiert das Cauchy Produkt der Reihe a_k mit sich selbst!

$$\left|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \cdot a_j\right|$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}} \cdot \frac{(-1)^{j}}{\sqrt{j+1}}\right|$$

$$= |(-1)^n| \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-j+1}\sqrt{j+1}}.$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-j+1}\sqrt{j+1}}\right|.$$

Nun $(n+1-j)(j+1) \leq (n+1)(n+1)$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1-j)(j+1)}} > \frac{1}{n+1} \qquad \text{da } j \leq n.$$

Dann folgt dass

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1-j)(j+1)}} \geq \frac{n+1}{n+1} = 1$$

und somit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} a_j\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} 1$ ■.