**Satz** (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge

1) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} < 1$, dann konvergiert $\sum a_n$ absolute

2) Falls $\limsup |a_n|^{1/n} > 1$ dann divergieren $\sum a_n$ und $\sum |a_n|$.

—o—

Das Wurzelkriterium ist fundamental im Studium der Potenzreihen

**Defn** Sei $(c_k)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Potenzreihe in $z \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$P(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Falls $\limsup |c_k|^{1/k}$ existiert, definieren wir

$$\rho := \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0 \end{cases}$$

**Satz** Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ konvergiert abs. für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$.

**Bsp.** $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (d.h. $c_k = 1 \ \forall k$) ist konvergent $\Leftrightarrow |z| < \rho = \frac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} = 1$.

Manchmal funktionieren weder Quotientenkriterium noch Wurzelkriterium.

**Bsp.** Riemann Zeta Funktion.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s \in \mathbb{R},\ s > 0.$$

$\zeta(s)$ konvergiert für $s > 1$
divergiert für $0 < s \leq 1$.

**Doppelte Summation:**

Sie $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ eine Doppelreihe

**Defn** $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j \geq 0} a_{ij}$ falls es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt, mit $b_k = a_{\sigma(k)}$.

**Satz (Cauchy)** Wir nehmen an, dass es $B \geq 0$ gibt, so dass

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B \qquad \forall m \geq 0.$$

Dann konvergieren die folgenden Reihen absolut:

$$S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0 \quad \text{und}$$

$$U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0 \quad \text{sowie}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} U_j \quad \text{und es}$$

gilt:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j =: \sum_j \sum_i a_{ij}$$

Zudem konvergiert jede lin. Anordnung der Doppelreihe absolut, mit selbem Grenzwert.

Nun sei $\sum a_i$, $\sum b_j$ zwei Reihen.
Betrachte

$$\sum_{i,j} c_{ij} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_i b_j .$$

Wir möchten das Produkt von

$\sum a_i$ mit $\sum b_j$ berechnen.

<u>Defn</u> Das <u>Cauchy Produkt</u> der Reihen

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} a_i b_j \right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + b_0 a_1) + \dots$$

$$\begin{matrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ a_3 b_0 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

<u>Vorsichtig!!</u> Das Cauchy Produkt <u>muss nicht immer konvergieren.</u>

<u>Bsp.</u> $a_k = b_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$.

Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \geq 1,$$

und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) \text{ ist}$$

divergent

$\sum a_k = \sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ ist konvergent aber nicht abs. konv.

**Satz** Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ abs. konvergieren, so konvergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Als Anwendung haben wir

**Satz** $\forall \cancel{x}, y \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$$

**Beweis**. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\exp(y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}$$

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\ell\geq 0 \\ k\geq 0 \\ \ell+k=n}} \frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!}\right)$$

Nun

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}_{} \underset{\text{Binom. Satz}}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}}_{= \exp(x+y)}$$

$$\exp(x)\exp(y)$$

__Satz__ Für jedes $n$, sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge.

Wir nehmen an, dass

1) $\lim_{n\to\infty} f_n(j) = f(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$.

2) Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0,\infty[$ so dass

a) $|f_n(j)| \leq g(j)$ $\forall j \geq 0$, $\forall n \geq 0$

b) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert.

Dann folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j).$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lim f_n(j) = \lim \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

**Kor** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Folge

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n_{n\geq 1} \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

---

**Beweis** $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \underset{\text{Binom. Satz}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{z}{n}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{z^k}{n^k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}$$

Sei nun $f_n(k) := \begin{cases} \frac{z^k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} & 0\leq k\leq n. \\ 0 & k\geq n+1 \end{cases}$

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k).$$

Nun ist $\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}$

$$= \left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Also 1) $\frac{n!}{(n-k)!\,n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

2) $\left|\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right| \leq 1. \Longrightarrow |f_n(k)| \leq \frac{|z|^k}{k!}$

1 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(k) = \frac{z^k}{k!} =: f(k)$

Sei $f(k) := \frac{z^k}{k!}$

$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(k)$

$|f_n(k)| < \frac{|z|^k}{k!}$

---

Nun Sei $g(k) := \frac{|z|^k}{k!}$. Dann

$\sum_{k=0}^{\infty} g(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$ konvergent $\forall z$

da $\exp(z)$ konv. abs. $\forall z$.

Dann haben wir nach Satz

$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$

$\|$

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)}.$

$= \lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$

$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{Exp}(z) = \lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.}$

$\boxtimes$.

/7

## §3 Stetige Funktionen.

Unter einer reellwertige Funktion versteht man eine Abbildung mit werten in $\mathbb{R}$.

Sei $D$ eine beliebige Menge, und $f: D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion.

Sei $\mathbb{R}^D := \{ f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ eine Abbildung} \}$.

die Menge aller reelwertige Funktionen, die auf $D$ definiert.

Sind $f, g$ Funktionen auf $D$, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so definiert man die Addition und skalare Multiplikation durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

$\mathbb{R}^D$, bezüglich diese Addition und skalare Multiplikation, bildet ein Vektorraum.

Die Null Funktion, die immer den wert $0$ annimmt,

$$\vartheta(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ist der Null vektor des Vektorraums $\mathbb{R}^D$.

$$(f+\vartheta)(x) = f(x) + \vartheta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$\Rightarrow f + \vartheta = f \quad \forall f \in \mathbb{R}^D$$

Man definiert auch ein **Produkt zweir Funktionen** durch

$$(fg)(x) := f(x)\,g(x)$$

Für die konstante Funktion

$$1(x) := 1 \quad \forall x \in D$$

gilt $\quad f \cdot 1 = f, \quad \forall f \in \mathbb{R}^D.$

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und ist $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, so definiert man den **Quotienten**

$$\frac{f}{g} : D' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

**Defn** (**Komposition von Funktionen**)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset E$.

Die **Komposition** von $g$ und $f$ (**Verknüpfung von $g$ und $f$**) ist die Funktion

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

**Defn** Sei $f: D \to \mathbb{R}$

1) $f$ ist nach <u>oben beschränkt</u> falls die Menge der Bilder $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.

2) $f$ ist nach <u>unten beschränkt</u> falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt ist

3) $f$ ist <u>beschränkt</u>, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

**Defn.** Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}$ ist.

1) <u>Monotone wachsend</u>, falls $\forall x, y \in D$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

2) <u>Streng mon. wachsend</u> falls $\forall x, y \in D$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

3) <u>Mon. fallend</u>, falls $\forall x, y$ $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

4) <u>streng mon fallend</u> $\forall x, y \in D$ $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

**Bsp.** 1) <u>Konstante Funktion</u>

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto c$$

Ist $c \in \mathbb{R}$, so setzt man $f(x) = c$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Die ist monotone aber nicht streng monotone und sie ist beschränkt, $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.

2) Die identische Abbildung.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x$

$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$x \to \boxed{f} \to x$

f ist streng monotone wachsend

$x < y \Rightarrow x = f(x) < f(y) = y.$

aber f ist nicht beschränkt.

$\tilde{f}: [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto x$

$\tilde{f}$ ist ~~…~~ streng mon. wachsend

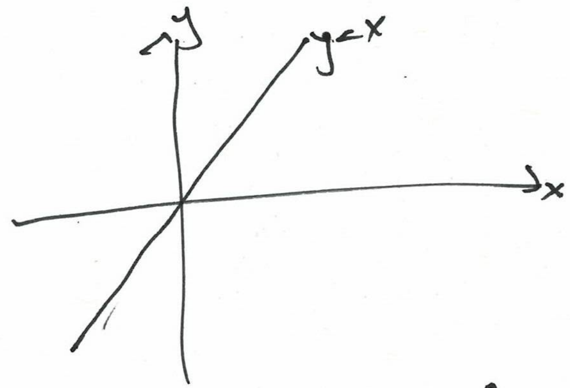
und auch beschränkt.

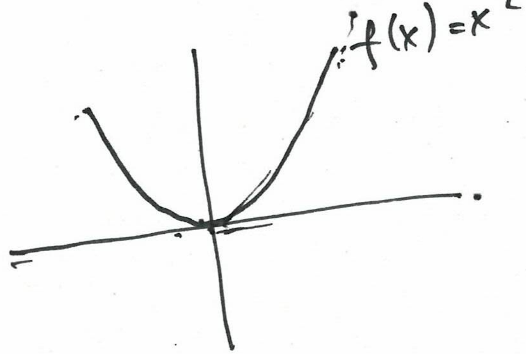
3) $n \in \mathbb{N}$

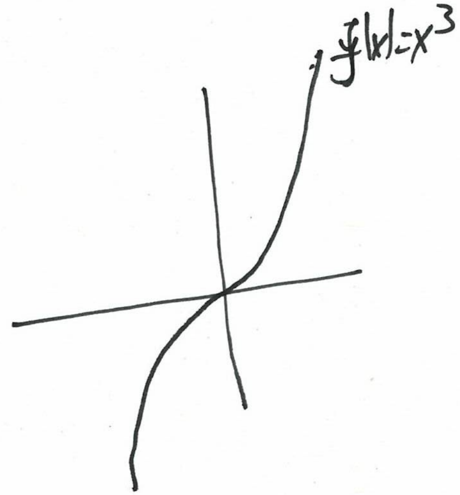
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^n.$

ist genau streng mon. wachsend, falls n ungerade ist

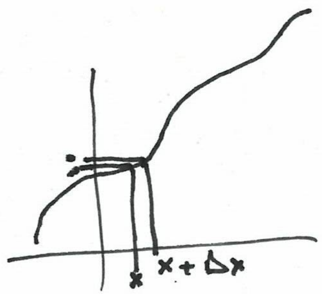


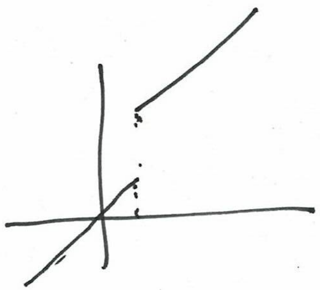



## § 3.2 Stetigkeit.

Eine stetige Funktion verändert sich wenig bei kleinen Änderungen des Arguments.
Die stetige Funktionen machen also keine wilden Sprünge.



**Defn.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.
Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ stetig falls es für jedes $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

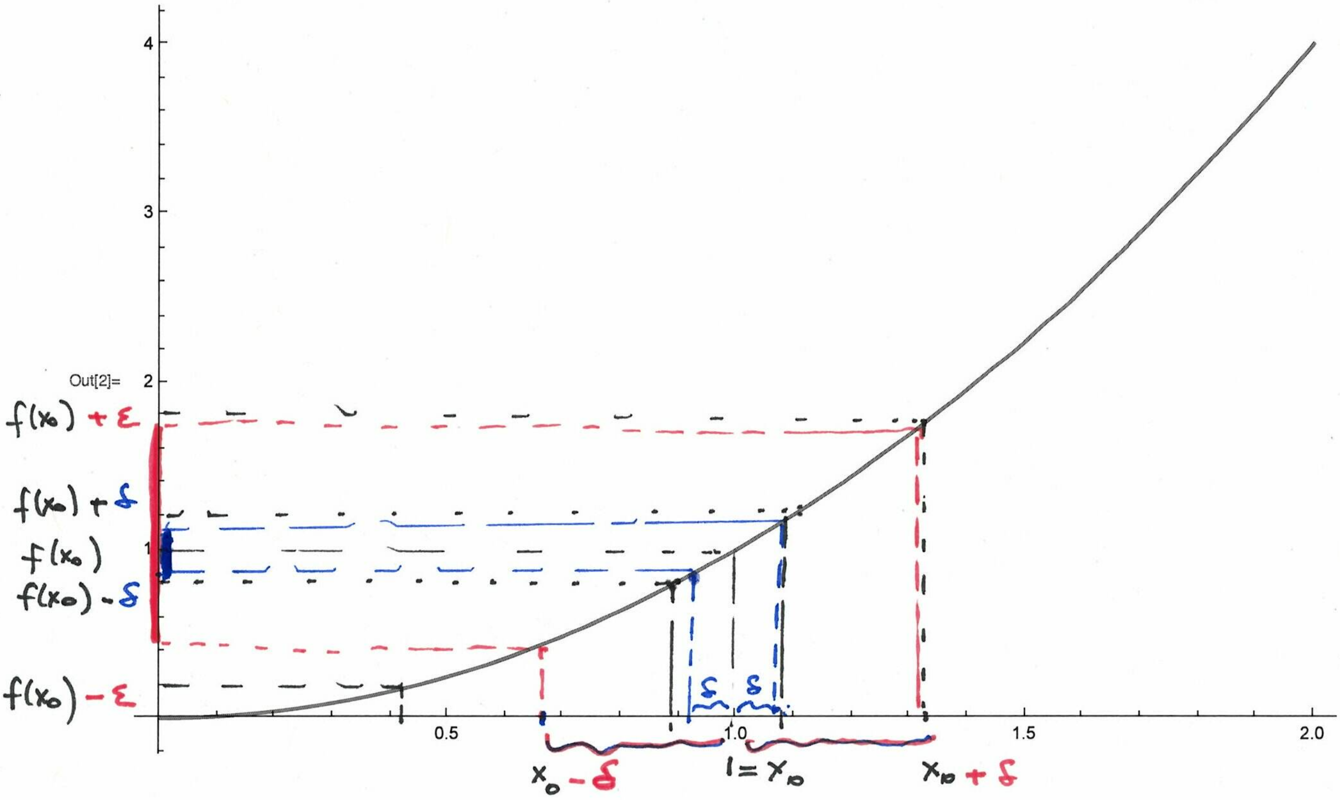
**Bmk**
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

**Bmk.:** Der Funktionswert $f(x)$ unterscheidet sich beliebig wenig vom $f(x_0)$ wenn man sich der Stelle $x_0$ genügend nähert.

$\varepsilon = 0.8 \Rightarrow$ can choose $\delta \sim 0.3$

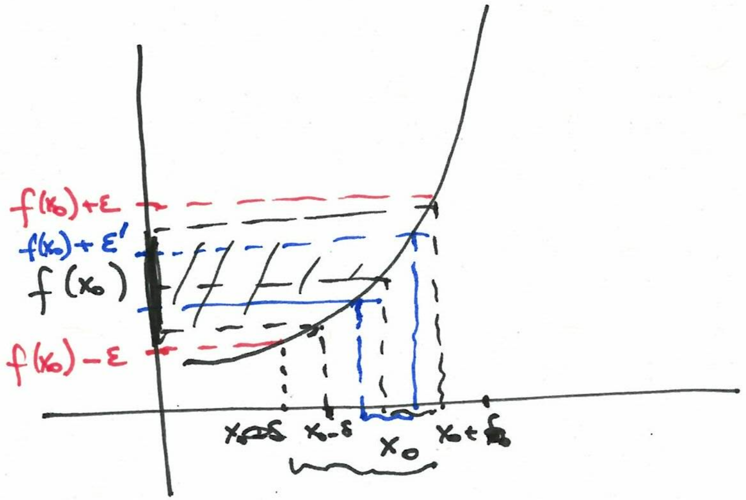
$\varepsilon = 0.2 \Rightarrow$ can choose $\delta \sim 0.09$

```
In[2]:= Plot[x^2, {x, 0, 2}]
```




$$f(]1-\delta, 1+\delta[) \subset ]f(1)-\varepsilon, f(1)+\varepsilon[$$

$$f(]1-\delta, 1+\delta[) \subset ]f(1)-\varepsilon, f(1)+\varepsilon[$$




Für gegebene $\varepsilon$-Umgebung von $f(x_0)$, kann man eine $\delta$-Umgebung von $x_0$ wählen so dass der Abstand zwischen $f(x)$ und $f(x_0)$ kleiner als $\varepsilon$ ist falls der Abstand von $x$ zu $x_0$ kleiner als $\delta$ ist.

<u>Def</u> Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt $x$ von $D$ stetig ist.

<u>Bsp.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x$ ist stetig in jedem Punkt $x_0$.

<u>Beweis</u>: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir möchten zeigen dass $\varepsilon > 0$.
$\exists \delta > 0$ ~~Dann~~ falls $|x - x_0| < \delta$ ist.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

~~Also~~ Da $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$ ist, für gegebenen $\varepsilon > 0$ kann man $\delta$ als $\varepsilon$ wählen, dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

**Satz 3.2.4.**

Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, und

$f : D \to \mathbb{R}$.

Die Funktion $f$ ist genau dann in $x_0$ stetig falls für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $D$ mit $\lim a_n = x_0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

**Bmk** $f$ ist stetig in $x_0$

$\Longleftrightarrow$ $\forall (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0$

gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$= f(\lim a_n)$

$f$ ist stetig in $x_0$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)}$

$\forall (a_n)$ mit $\lim a_n = x_0$.

**Beweis** ($\Longrightarrow$)

Annahme: $f(x)$ in $x_0$ stetig.

d.h. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so dass

für alle $x \in D$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge mit

$\lim a_n = x_0$

Sei nun $N \geq 1$ so dass

$|a_n - x_0| < \delta$ $\forall n \geq N$.

Dann folgt aus Stetigkeit von $f$ dass $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\forall n \geq N$.

und daher $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

/14.