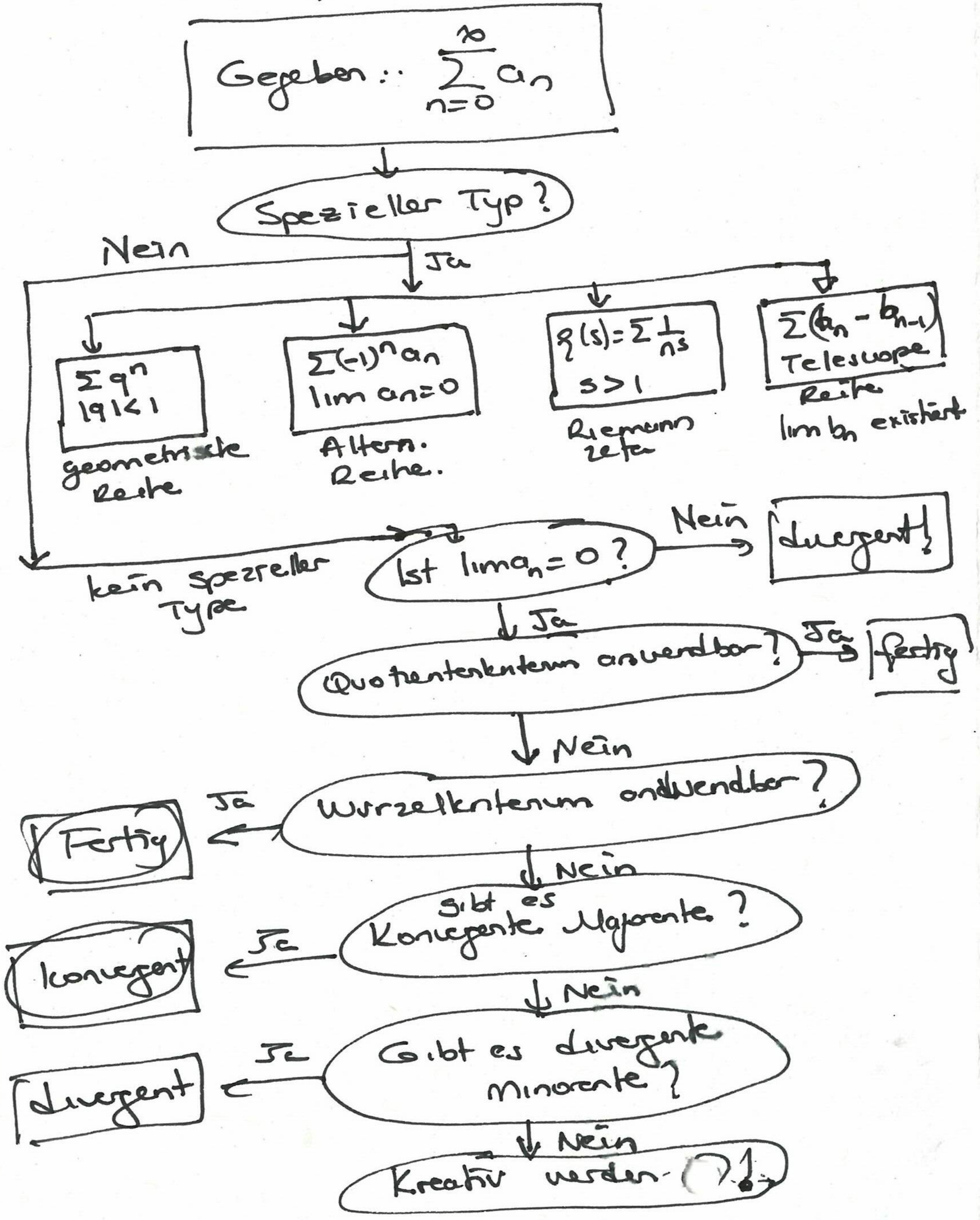
Der Untersuchung unendlicher Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.



Stetige Funktionen

Defn. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.
Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 stetig falls es für jedes $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

d.h. Der Funktionswert $f(x)$ unterscheidet sich beliebig wenig vom $f(x_0)$ wenn man sich der Stelle x_0 genügend nähert.

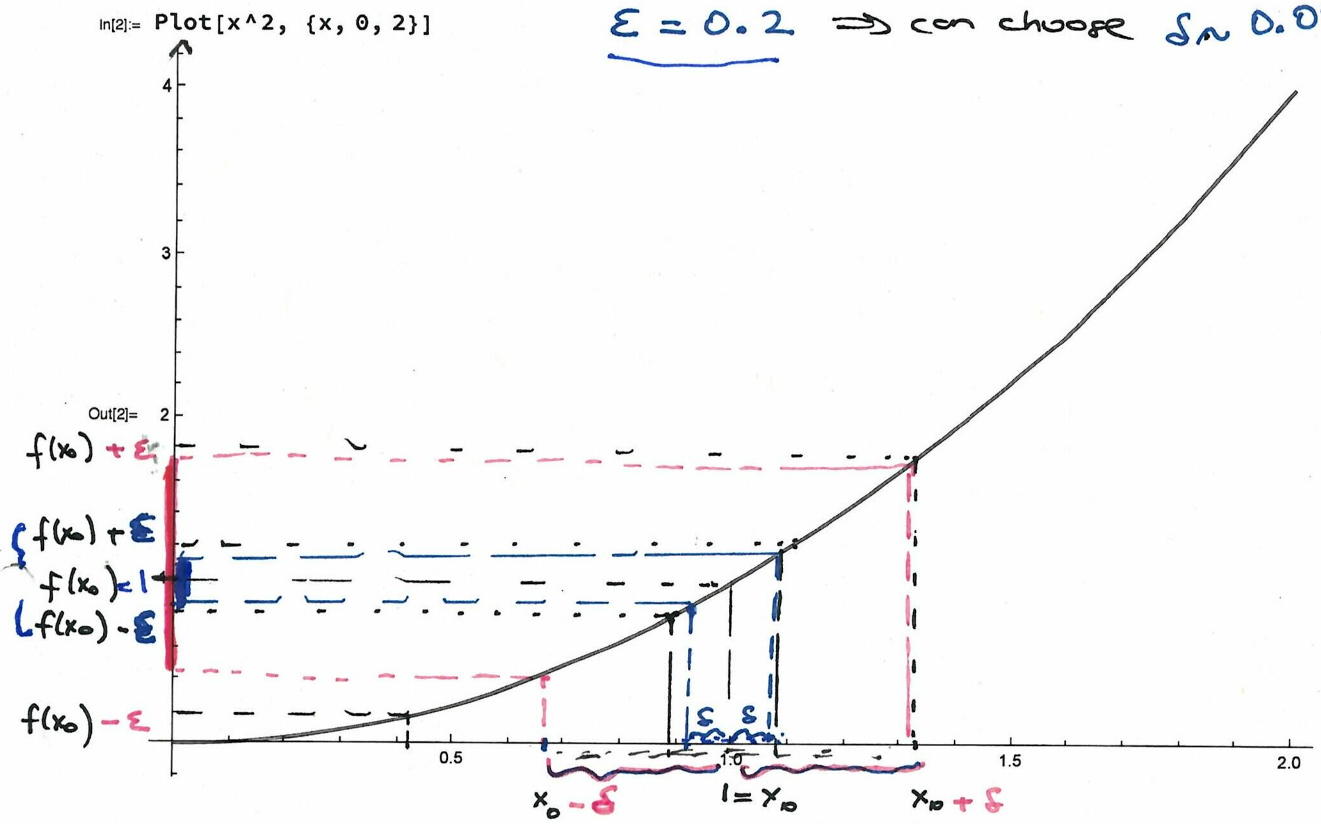
Defn Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt x von D stetig ist.

Bsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ Identitische Funktion ist stetig.

Satz 3.2.4 $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.
f ist in x_0 stetig $\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0$ gilt $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(a_n)$.

$\varepsilon = 0.8 \Rightarrow$ can choose $\delta \sim 0.3$

$\varepsilon = 0.2 \Rightarrow$ can choose $\delta \sim 0.09$



$f(]1-\delta, 1+\delta[) \subset]f(1)-\varepsilon, f(1)+\varepsilon[$

$f(]1-\delta, 1+\delta[) \subset]f(1)-\varepsilon, f(1)+\varepsilon[$

$f(]x_0-\delta, x_0+\delta[) \subset]f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon[$

f ist in x_0 stetig

$\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0$ gilt

$\lim f(a_n) = f(x_0)$

$\boxed{\lim f(a_n) = f(\lim a_n)}$

Erinnerung:

Satz: Seien (a_n), (b_n) Folgen

$\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

Dann gilt

$\lim (a_n + b_n) = a + b$

$\lim (a_n b_n) = ab.$

$\lim (\lambda a_n) = \lambda a.$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b_n \neq 0$, $b \neq 0$.

Kor 3.2-5 Sei $x_0 \in D \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0.

1) Dann sind $f+g$, λf, fg stetig in x_0.

2) Falls $g(x_0) \neq 0$ dann ist

$$\frac{f}{g} : D \cap \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

Beweis: Sei (a_n) mit $\lim a_n = x_0$.

f stetig in $x_0 \Longrightarrow \lim f(a_n) = f(x_0)$

g stetig in $x_0 \Longrightarrow \lim g(a_n) = g(x_0)$

Dann gilt:

$$\lim\left((f+g)(a_n)\right)$$
$$= \lim\left(f(a_n) + g(a_n)\right)$$
$$= \underline{\lim f(a_n)} + \lim g(a_n)$$
$$= f(x_0) + g(x_0)$$
$$= (f+g)(x_0).$$

$$\lim (f+g)(a_n) = (f+g)(\lim a_n)$$

$\Rightarrow f+g$ ist stetig in ~~x_0~~.

Defn Eine <u>Polynomiale Funktion</u> $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

wobei $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}$

Falls $a_n \neq 0$, ist n <u>der Grad von P</u>.

Kor Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Folgt aus wiederholte Anwendungen von Kor 3.2.5 und auch dass $f(x) = x$ stetig ist.

Kor Seien P, Q polyn. Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \underline{\mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\}} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

Satz Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ zwei Teilmengen, $f: D_1 \longrightarrow D_2$, $g: D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, sowie $x_0 \in D_1$.

Falls f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig sind, so ist $g \circ f: D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Beweis Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in D_1 mit $\lim a_n = x_0$.

Da f in x_0 stetig ist, folgt dass

$$\lim f(a_n) = f(x_0)$$

Und g in $f(x_0)$ stetig ist folgt dass

$$\lim g(f(a_n)) = g(\lim f(a_n))$$

$$\lim((g \circ f)(a_n)) = g \circ f(x_0) = g(f(x_0))$$

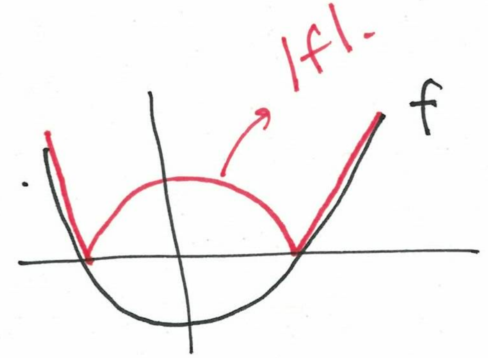
$\Rightarrow g \circ f$ ist stetig in x_0.

Defn. Seien $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\max(f,g)(x) := \max(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D.$$

$$\min(f,g)(x) := \min(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D.$$

$$|f|(x) := |f(x)| \quad \forall x \in D.$$



Lemma 3.4.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ stetig in x_0.

Beweis $|f|$:

Sei $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ so dass $\forall x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

(Da f in x_0 stetig ist).

$$\big||f|(x) - |f|(x_0)\big| = \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \le |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow |f|$ ist in x_0 stetig.

Wir bemerken zunächst dass $\forall u, v \in \mathbb{R}$

$$\max(u,v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}.$$

$$\min(u,v) = \frac{u+v-|u-v|}{2}.$$

Dann folgt

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

$$\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Da f, g stetig sind, sind $f+g$, $f-g$ stetig.

Da $f-g$ stetig ist, ist $|f-g|$ stetig.

$\Rightarrow \max(f,g)$, $\min(f,g)$ stetig.

Bsp. Die Indikatorfunktion der Rationalen Zahlen.

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig!.

Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$.

Sei x_k die an der k-ten Nachkomma abgebrochene Dezimal Darstellung von x_0.

z.B $x_0 = \pi$, $x_1 = 3$ $x_2 = 3.1$

$x_3 = 3.14$, ...

Dann gilt $x_k \in \mathbb{Q}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

und $x_k \to x_0$.

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1$ da $x_k \in \mathbb{Q}$.

und damit $\lim \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1$.

Aber $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$

da $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dann $\lim \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_k) \neq$

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\lim x_k)$.

$\Rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ ist in $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nicht stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$.

Somit eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $\lim x_n = x_0$,

Da $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, gilt

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) = 0$, daher $\lim \mathbb{1}(x_n) = 0$.

aber da $x_0 \in \mathbb{Q}$ ist,

$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_0) = 1$

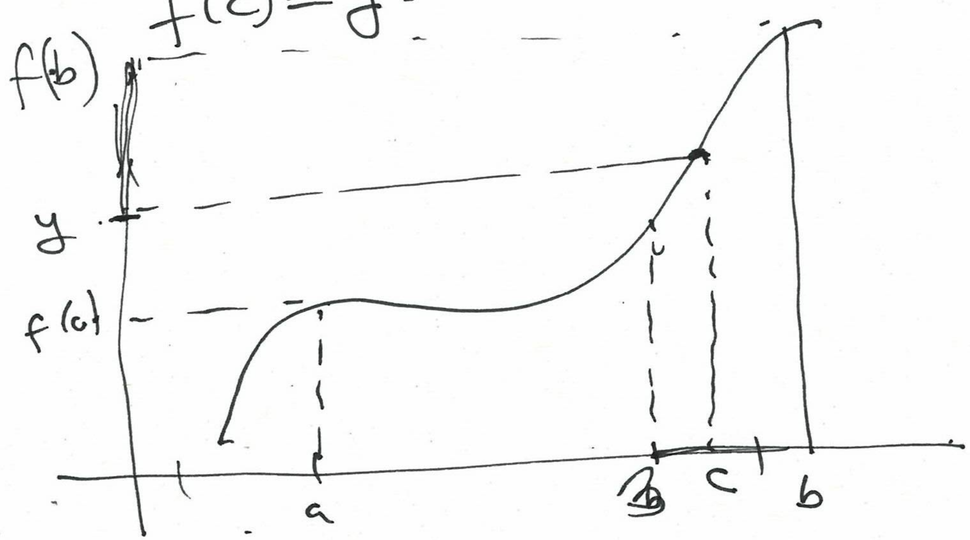
$\Rightarrow 0 = \lim \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x_n) \neq \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(\lim x_n) = 1$.

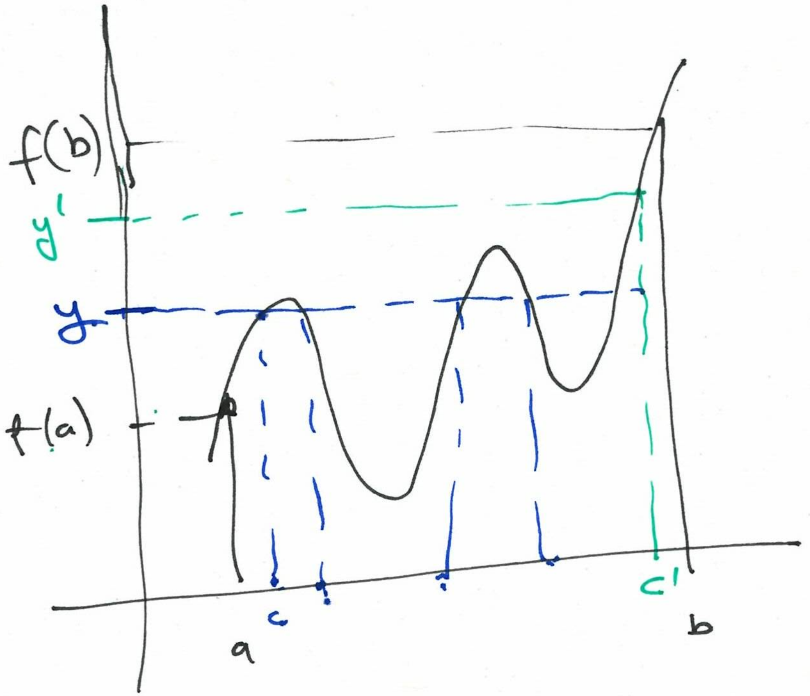
$\Rightarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ ist in $x_0 \in \mathbb{Q}$ nicht stetig.

§3.3 Der Zwischenwertsatz

Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall $f: I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion und $a, b \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es (mindestens) ein c zwischen a und b mit $f(c) = y$.





Beweis Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (O.E.d.A) nehmen wir an dass

$a \leq b$ und $f(a) \leq f(b)$

Sei y, $f(a) < y \leq f(b)$

wir müssen ein $c \in [a,b]$ finden so dass $f(c) = y$.

Idee: Wir benutzen ein Approximationsverfahren.

In diesem Fall Bisektionsverfahren.

Wir definieren 2 monotone Folgen:

$a = a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \ldots \leq b_1 = b.$

(a_n) ist mon. wach.

(b_n) ist mon. fallend.

mit $\lim(a_n) = \lim(b_n) =: c.$

und $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$

Dann aus Stetigkeit von f

folgt dass:

$$\lim f(a_n) < y \leq \lim f(b_n)$$

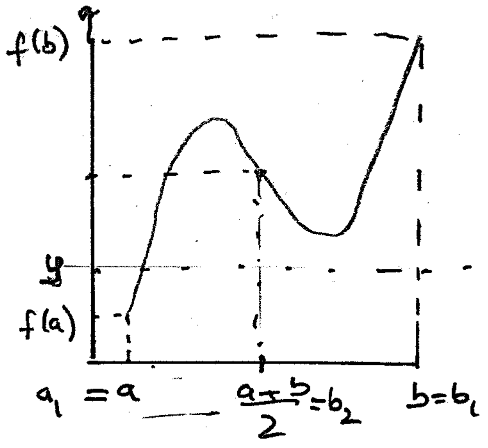
$$\overset{\text{stetigkeit}}{=} \qquad\qquad \overset{\text{stetigkeit}}{=}$$

$$f(\lim(a_n)) \qquad\qquad f(\lim b_n).$$

$$f(c) < y \leq f(c)$$

$$\Longrightarrow f(c) = y.$$

Um die Folgen (a_n) und (b_n) zu definieren betrachten wir 2 Fälle.



<u>Fall 1</u>

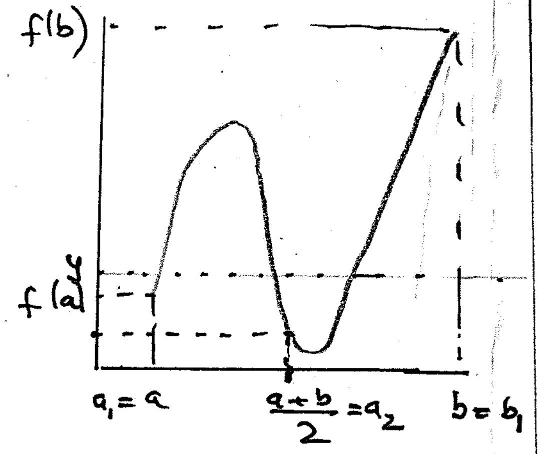
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq y$

Setzen wir

$a_2 = a_1 = a$

$b_2 = \frac{a+b}{2}$

$= \frac{a_1+b_1}{2}$



<u>Fall 2</u>

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < y$

Setzen wir

$a_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$

$b_2 = b_1$

Auf jedem Fall gilt

1. $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$ ✓
2. $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$.
3. $\underline{f(a_2) < y \leq f(b_2)}$

Wir iterieren jetzt dieses Verfahren.
Wir nehmen an, dass wir Folgen definiert haben nach $(k-1)$ Schritten mit

1. $a = a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_3 \leq a_k \leq b_k \leq \ldots b_1 = b$.
2. $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \ldots = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$
3. $f(a_k) < y \leq f(b_k)$.

Nun untersuchen wir wieder 2 Fälle.

Fall 1 $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) \geq y$

dann

$$a_{k+1} := a_k$$

$$b_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2}$$

Fall 2 $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) < y$ dann

$$a_{k+1} := \frac{a_k+b_k}{2} \qquad b_{k+1} := b_k$$

Dann ist immer

1. $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$

2. $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1)$

3. $f(a_{k+1}) < y \leq f(b_{k+1})$.

Nach Induktion erhalten wir zwei

Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$

die den Eigenschaften

1, 2, 3 erfüllen.

wegen 1.

$$a = a_1 \leq a_2 \leq \ldots < b_2 \leq b_1 = b.$$

(a_n), (b_n) sind mon.

und beschränkt

Nach mon. konv- satz existieren

$\lim a_n$, $\lim b_n$ ~~exist~~

wegen 2. $\lim(b_n - a_n) = \cancel{\lim}\frac{1}{2^{n-1}}(b_1 - a_1)$

$$= \left(\lim \frac{1}{2^{n-1}}\right)(b-a) = 0$$

/12

$\Rightarrow \lim b_n = \lim a_n$

setze $\lim b_n = c = \lim a_n$.

Sei $c \in [a, b]$ dieser Wert.

(Da $a \leq a_n \leq b$

$a \leq b_n \leq b$, gilt.

$a \leq \lim a_n = \lim b_n \leq b$.)

$\Longrightarrow$ Aus Stetigkeit von f

~~folgt~~ und aus

$f(a_n) < y \leq f(b_n)$

folgt das.

$\lim f(a_n) < y \leq \lim f(b_n)$

$\quad \shortparallel$

$f(\lim a_n) < y \leq f(\lim b_n)$

$f(c) < y \leq f(c) \Longrightarrow y = f(c)$ ∎

Zwischenwertsatz – ZWS.

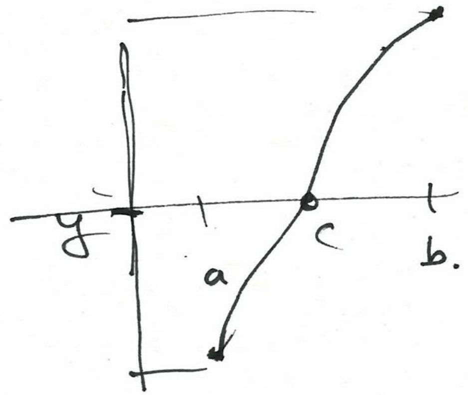
hat viele Folgerungen.

<u>Kor</u> <u>Existenz einer Nullstelle.</u>

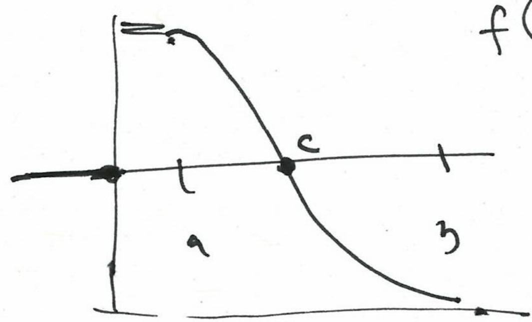
Sei f stetig $= f: [a, b] \to \mathbb{R}$

Falls $f(a)f(b) < 0$, dann

$\exists$ $c \in]a, b[$ mit $f(c) = 0$



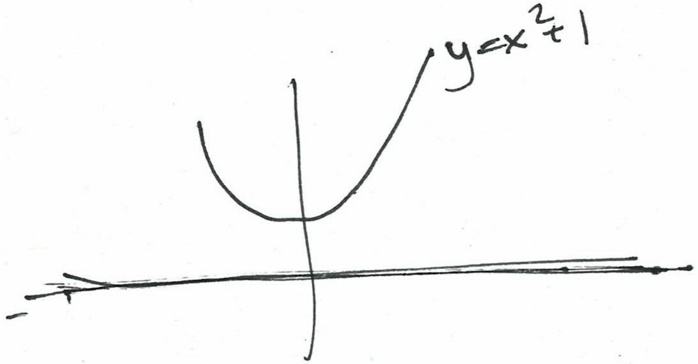
$f(c) = 0$.



Kor Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Bmk. n = ungerade ist wichtig!

z.B $P(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.



Kor Jede 3×3 Matrix A mit koeffizienten in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Es gilt auch für ein $n \times n$ Matrix, n = ungerade).

Beweis. Charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

und p hat grad 3

(Falls A $n \times n$ Matrix ist, ist $P(\lambda)$ von grad n.)

Die Nullstellen von $p(\lambda)$ sind genau die Eigenwerte von A.