f ist in x_0 stetig $\quad f: D \to \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \geq 1}$ mit $\lim a_n = x_0 : \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$

Satz: $f, g : D \to \mathbb{R}$, beide stetig in $x_0 \in D$. Dann

1) $f+g, \lambda f, fg$ sind stetig in x_0.
2) $f/g : D \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)/g(x)$ ist stetig in x_0.

Kor 1) Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

2) Seien P, Q polyn. auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist $P/Q : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots x_m\} \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz Sei $f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $g: E \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig.

Satz Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind $|f|$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ stetig

Satz Zwischenwertsatz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval, $f: I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion, und $a, b \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein c zwischen a und b mit $f(c) = y$.

Kor Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Falls $f(a)f(b) < 0$ dann $\exists c \in]a,b[$ mit $f(c) = 0$.

Kor Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann besitzt P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis: OE d.A. können wir $a_n = 1$ annehmen.

Für $x \neq 0$ betrachte

$$P(x) = x^n \underbrace{\left(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n}\right)}_{=: Q(x)}.$$

Da $\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$

und $\lim_{m\to\infty} \left(-\frac{1}{m}\right)^j = 0 \quad 1 \leq j \leq n.$

~~Dann~~ folgt dass es $N > 1$ $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$\forall m \geq N \quad \left|a_{n-1}\frac{1}{m} + \dots + a_0 \frac{1}{m^n}\right| \leq \frac{1}{2} = \varepsilon.$

Insbesondere $\left|\frac{a_{n-1}}{N} + \dots + \frac{a_0}{N^n}\right| \leq \frac{1}{2}$

damit

$$\left|1 + \frac{a_{n-1}}{N} + \dots + \frac{a_0}{N^n}\right| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\left|1 + \frac{a_{n-1}}{N} + \dots + \frac{a_0}{N^n}\right| \geq \left|1 - \left|\frac{a_{n-1}}{N} + \dots + \frac{a_0}{N^n}\right|\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Folglich: $\frac{1}{2} \leq Q(N) \leq \frac{3}{2}$

Analog kann man zeigen dass $\frac{1}{2} \leq Q(-N) \leq \frac{3}{2}.$

$P(N) = N^n Q(N) > 0.$

Da n = ungerade ist $P(-N) = (-N)^n Q(-N) < 0$

Nach ZWS also gibt $x_0 \in]-N, N[$ mit $P(x_0) = 0$. $\square$

/2.

§3.4 Der Min-Max Satz

Defn. Ein Intervall $\subset \mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a, b]$, $a \leq b$ ist.

Satz (Der Min-Max Satz)
Sei $f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall. Dann gibt es $u \in [a, b]$ and $v \in [a, b]$ mit
$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a, b].$$

Insbesondere ist f beschränkt

Bmk. $f(u) = \operatorname{Inf} \{f(x) : x \in [a, b]\}$
$f(v) = \operatorname{Sup} \{f(x) : x \in [a, b]\}$.
d.h. Sup. und Inf werden angenommen.

Beweis i) wir zeigen dass
dass $f([a, b])$ beschränkt ist.

Falls nicht, so gibt $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [a, b]$ mit

$f(t_n) > n$.

$(t_n)_{n \geq 1} \subset [a, b]$ ist beschränkt.

Nach Bolzano-Weierstrass Satz eine Teilfolge $(t_{e(n)})$ existiert, die konvergent ist.

Sei $\lim t_{e(n)} = x_0$

Da $a \leq t_n \leq b$, auch
$$a \leq t_{e(n)} \leq b$$

und damit folgt dass auch $x_0 \in [a,b]$.

Aus Stetigkeit von f folgt dass

$$\lim f(t_{e(n)}) = f(\lim t_{e(n)}) = f(x_0)$$

d.h. die Folge $f(t_{e(n)})$ konvergiert mit Grenzwert $f(x_0)$.

Insbesondere $f(t_{e(n)})$ ist beschränkt. Aber dies ist ein Widerspruch zu $f(t_{e(n)}) \geq e(n)$. ↯

$\Rightarrow f([a,b])$ ist beschränkt.

Da $f([a,b])$ beschränkt ist, $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $\inf\{\ldots\}$ existieren.

Sei $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Für jedes $n \geq 1$, sei $\underline{\underline{x_n}} \in [a,b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

M ist sup.

Da $M - \frac{1}{n}$ nicht mehr ein sup. ist.

Nochmals da $x_n \in [a,b]$, ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ~~ist~~ beschränkt.

Nach B.W. sei $(x_{e(n)})$ eine konv. Teilmenge mit Grenzwert $v \in [a,b]$

/4.

$\lim x_{\ell(n)} = v$.

Aus Stetigkeit von f folgt

$$\lim f(x_{\ell(n)}) = f(\lim x_{\ell(n)}) = f(v)$$

Aber aus $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$

folgt

$$\underbrace{M - \frac{1}{\ell(n)}}_{\downarrow\, M} < f(x_{\ell(n)}) \leq \underbrace{M}_{\downarrow\, M}$$

Nach Sandwich Satz,

$$\lim f(x_{\ell(n)}) = M$$

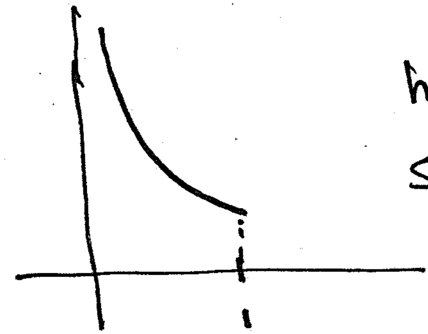
d.h. $\exists\, v \in [a,b]$ so dass

$$f(v) = M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

d.h. Das Sup. ist angenommen. $\boxtimes$

Bmk Der Satz gilt nicht für Intervalle die nicht kompakt sind.

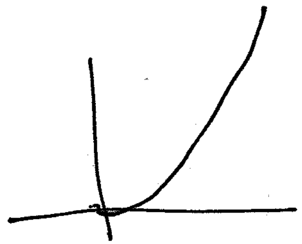
z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ $]0,1]$



hat kein max stetig auf $]0,1]$

oder $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$x \longrightarrow x^2$



ist stetig aber nicht beschränkt.

§ 3.5 Der Satz über Umkehrabbildung.

Satz 3.5.3. Sei I ein Intervall. Sei $f, I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monotone wachsend. Dann ist das Bild von $f = f(I) =: J$ ~~ist ein~~ ein Intervall und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : J \to I \text{ ist}$$

stetig, streng monotone wachsend.

Beweis Wir nehmen an $I = [a, b]$

1) f ist injektive: Da f streng mon. wachsend ist, Falls $x \neq y$ dann ist $f(x) \neq f(y)$
$\Rightarrow f$ ist injektive.

2) f surjektive.
Diese folgt aus Zwischenwertsatz
Sei $c := f(a)$, $d := f(b)$
($c \neq d$, da $a \neq b$ ist).
Sei $y \in [c, d] = J$.
Nach ZWS, $\exists\, x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.
d.h. $f : [a, b] \to [c, d]$ ist injektive und surjektive.

Sei: $f^{-1} : J \to I$ die Umkehrabbildung.

3) f^{-1} streng monotone wachsend:
wähle $u < y$ in $J = [f(a), f(b)]$
wäre nun $f^{-1}(u) \geq f^{-1}(y)$,

So wäre auch

$$u = f(f^{-1}(u)) \geq f(f^{-1}(y)) = y$$

da f streng mon. wachsend ~~ist~~

Aber dann, $u \geq y$, was nicht der Fall ist, also ist

$$f^{-1}(u) < f^{-1}(y)$$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist streng mon. wachsend.

c) <u>f^{-1} ist stetig.</u> Um die Stetigkeit von f^{-1} zu zeigen sei $p \in J$. wähle eine konvergente Folge $(p_n) \subset J$ mit $\lim p_n = p$.

z.z.: $\lim f^{-1}(p_n) = f^{-1}(p)$.

Sei $\lim p_n = p$.

Dann ist die Folge

$$p_n^- := \inf \{p_k : k \geq n\}$$

ist mon. wachsend und

$\lim p_n^- = \liminf p_n$.

und die Folge

$$p_n^+ := \sup \{p_k : k \geq n\}$$

ist mon. fallend und.

~~[illegible]~~ $\lim p_n^+ = \limsup p_n$.

Da $\lim p_n = p$, die Beide Folgen p_n^+, p_n^- konvergieren gegen p:

Da f^{-1} mon. wachsend ist, ist auch die Folge $f^{-1}(p_n^-)$ ebenfalls mon. wachsend.

Da $p_n^- < p$ ~~ist~~, ist

$$f^{-1}(p_n^-) < f^{-1}(p)$$

Daher ist die Folge $f^{-1}(p_n^-)$ beschränkt.

Nach mon. Konvergenz Satz, konvergiert die Folge $f^{-1}(p_n^-)$, ebenso $f^{-1}(p_n^+)$

Sei $\lim f^{-1}(p_n^-) =: L$

Da f stetig ist,

$$\begin{aligned} f(L) &= f(\lim(f^{-1}(p_n^-))) \\ &= \lim(f(f^{-1}(p_n^-))) \\ &= \lim p_n^- = p. \end{aligned}$$

So gilt $f^{-1}(p) = L$.

Das Analog Vorgehen für p_n^+ liefert dass $L = \lim f^{-1}(p_n^+) = f^{-1}(p)$.

Aber, da $p_n^- \leq p_n \leq p_n^+$ ist, und f^{-1} mon. wachsend ist, gilt

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(p_n^-) \arrow[d] & \leq f^{-1}(p_n)) \leq & f^{-1}(p_n^+) \arrow[d] \\ f^{-1}(p) & & f^{-1}(p) \end{tikzcd}$$

Nach "Sandwich Satz" auch die mittlere Folge $f^{-1}(p_n)$ konvergiert gegen $f^{-1}(p)$

$$\lim f^{-1}(p_n) = f^{-1}(p)$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ stetig } \blacksquare$$

Folgerungen des Umkehrsatzes

Bsp. Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$f : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$
$$x \longmapsto x^n$$

streng monotone wachsend, stetig, surjektiv. Nach dem Umkehrsatz existiert eine streng mon wachsende stetige Umkehrabbildung

$$[0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$$
$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

Bmk Um streng monotonie der Funktion $x \mapsto x^n$ zu sehen

$$y^n - x^n = \underline{(y-x)}\,\underline{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}$$

Für $x, y > 0$

$$y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1} > 0$$

Also folgt aus

$(y-x) > 0$, dass $y^n - x^n > 0$

d.h. $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$.

§ 3.6. Die reelle Exponentialfunktion.

Satz 3.6.1 $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \infty[$ ist streng mon. wachsend, stetig und surjektiv.

Beweis

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Wir haben schon gesehen dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \text{ abs. konv. } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Falls $x \geq 0$ ist,

$$\exp(x) \geq 1 > 0$$

und $\exp(0) = 1$.

Damit $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$

Wegen $\exp(-x)\exp(x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

Somit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

Folgt dass $\exp(-x) > 0 \ \forall x \geq 0$

damit $\exp(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

d.h. Bild(exp) $= \exp(\mathbb{R}) \subset]0, \infty[$.

mon. wachsend:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)[\exp(y-x) - 1].$$

Falls $x < y$, d.h. $y - x > 0$,

so ist $\exp(y-x) > 1$

und somit $\exp(y) - \exp(x) > \exp(x) > 0$.

$\Rightarrow \exp(y) > \exp x$.

Daher ist exp. streng mon. wachsend.

exp. ist stetig auf $\mathbb{R}$.

/10.

Stetigkeit in $x=0$:

Für $|x|<1$ und $n\in\mathbb{N}$,

gilt $|x|^{n-1} \leq 1$.

Es gilt

$$|\exp(x)-1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n!}$$

$$\leq |x| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\right) = |x|(e-1) \leq |x|e.$$

Sei nun $x_n \to 0$, dann ist

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{0} < |\exp(x_n)-1| < \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{|x_n|e}$$

Nach Sandwich Satz : $|\exp(x_n)-1| \to 0$

$\Rightarrow \exp(x_n) \to 1 = \exp(0)$

Somit $1 = \exp(0)$

$= \exp(\lim x_n)$

$= \lim(\exp(x_n))$

$\Rightarrow \exp$ ist im $x=0$ stetig.

Stetigkeit in $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$, sei $x_n \to x_0$ eine konvergente Folge.

Dann ist $\exp(x_n) = \exp(x_n - x_0 + x_0)$

$= \exp(x_n - x_0) \cdot \exp(x_0)$

Da $y_n = x_n - x_0$ gegen 0 konvergiert,

$\exp(x_n - x_0) \to \exp(0) = 1$.

Damit $\exp(x_n) \to \exp(x_0)$

$\Rightarrow \exp$ ist überall in $\mathbb{R}$ stetig

Die Umkehrfunktion von exp wird mit $\underline{\underline{\ln}}$ bezeichnet.

<u>Kor</u>. <u>Der natürliche Logarithmus</u>

$$\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

ist eine streng mon. wachsende stetige bijektive Funktion. Gilt auch dass

1) $\ln(1) = 0$

2) $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b.}$

<u>Beweis</u>. $\exp(\ln x) = x$

$$\exp(\ln x + \ln y) = \exp(\ln x)\exp(\ln x)$$
$$= xy$$

Da exp ~~ist~~ die Umkehrfunk von ln ist,

$$xy = \exp(\ln(xy))$$

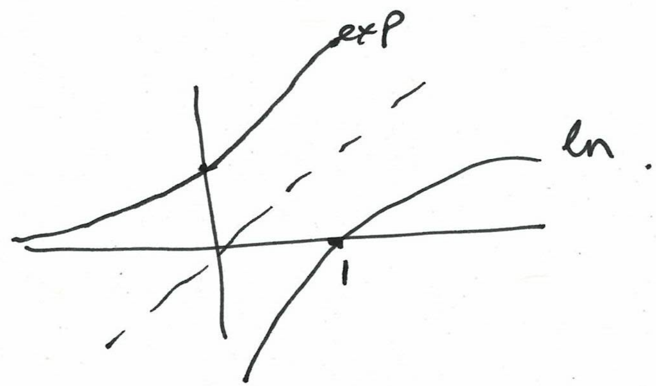
Damit $\exp(\underline{\ln x + \ln y})$

$$= xy = \exp(\underline{\ln(xy)}).$$

Da exp injektive ist,

$$\boxed{\ln x + \ln y = \ln(xy)}$$

Da $\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$.



Wir können Logarithmus und Exponentialfunktion benützen, um allgemeine Potenzen zu definieren.

Für $x > 0$, und $\underline{a \in \mathbb{R}}$ beliebig

Definieren wir

$$\boxed{x^a := \exp(a \ln x)}.$$

Insbesondere $x^0 = 1 \quad \forall \cancel{x} \in \mathbb{R}$.

<u>Kor</u> 1) Für $a > 0$, ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

eine streng mon. wachsende stetige Bijektion.

2) Für $a < 0$ ist

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

eine stetige, streng mon. fallende Bijektion.

3) $\ln x^a = a \ln x$

$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0.$

4) $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0.$

5) $(x^a)^b = x^{ab} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0$

<u>Beweis</u>: 1) Sei $a > 0$

Da $x \longmapsto \ln x$ streng mon. wachsend ist

so ist $x \longmapsto a \ln x$ streng mon. wachsend.

Da $x \mapsto \exp$ streng mon. wach. ist,

folgt dass $x \mapsto \exp(a \ln x) = x^a$

auch streng mon. wachsend ist.

$x \mapsto x^a$ ist eine Verknüpfung stetiger Funktionen und deswegen ist auch stetig.

2) Analog wie 1).

3) $\ln x^a = \ln(\exp(a \ln x))$
$= a \ln x$

4) $\underline{x}^a \underline{x}^b = \exp(a \ln x) \exp(b \ln x)$
$= \exp(a \ln x + b \ln x)$
$= \exp((a+b) \ln x)$
$= x^{a+b}$

5) Aus 3) folgt das $\ln x^a = a \ln x$

$(x^a)^b = (\exp(a \ln x))^b$
$= \exp(b \ln \exp(a \ln x))$
$= \exp(b a \ln x)$
$\overset{3}{=} \exp(\ln x^{ba})$
$= x^{ab}$.

$\boxtimes$