Satz Zwischenwertsatz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, und $a, b \in I$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $y = f(c)$

Satz (Der Min-Max Satz)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$. Dann gibt es $u \in [a, b]$ und $v \in [a, b]$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Insbesondere ist f beschränkt.

Satz über Umkehrabbildung.

Sei I ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monotone wachsend. Dann ist das Bild von $f = f(I) := J$ ein Intervall und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist stetig, streng mon. wachsend.

Bsp. Sei $n \geq 1$. Dann ist

$$f : [0, \infty[\to [0, \infty[, \quad x \mapsto x^n$$

streng mon. wachsend, stetig. Die Umkehrfunktion ist

$$[0, \infty[\to [0, \infty[, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Sie ist stetig und streng mon. wachsend,

Die reelle Exponential Funktion

Satz $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ ist streng mon. wachsend und stetig und surjektive

Kor Der natürliche Logarithmus

$$\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

ist streng mon. wachsend bijektive und stetig.

- $\ln(\exp x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(\ln x) = x \quad \forall x \in]0, \infty[$.
- $\ln(1) = 0$
- $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$

$\exp(a+b) = (\exp a)(\exp b)$

Defn Für $x > 0$, und $a \in \mathbb{R}$, beliebig, definieren wir

$$\boxed{x^a := \exp(a \ln x)}$$

Satz 1) Für $a > 0$ ist

$]0, \infty[\to]0, \infty[$

$x \longmapsto x^a$ streng. mon. wach., stetig bijektion

2) Für $a < 0$: x^a ist streng mon. fallend, stetig, bijektive

3) $\ln x^a = a \ln x \quad \forall x > 0$

4) $x^a x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0$

5) $(x^a)^b = x^{ab} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0$.

§ 3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen.

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

Eine Funktionenfolge ist eine Abbildung

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^D = \{ f: D \to \mathbb{R} \}.$$
$$n \longrightarrow f_n$$

~~Für~~ wobei $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Funktion.

Für jedes $x \in D$ erhält man eine Folge $(f_n(x))_{n\geq 1}$ reeller Zahlen.

Defn. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ **konvergiert punktweise gegen eine Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ falls für alle $x \in D$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

d.h. $\forall x \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_{x,\varepsilon} > 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bsp. Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$
$$x \longmapsto x^n$$

$$f_n(x) = x^n$$

Dann gilt für $0 \leq x < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

für $x = 1$ $\lim x^n = 1$

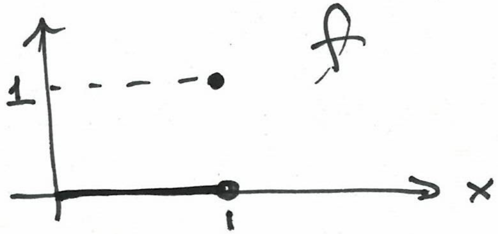
d.h $\lim f_n(x) = \lim x^n = \underline{0} \quad \forall\, 0 \le x < 1$

und $\lim f_n(x) = \lim 1 = 1$ falls $x = 1$

Also konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\ge1}$ punktweise gegen die Funktion

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; 0 \le x < 1 \\ 1 & , \; x = 1. \end{cases}$$



Bmk: Die Funktionen $x^n = f_n(x)$ sind alle stetig in $[0,1]$ aber die Grenzwert Funktion f ist nicht stetig in 1.

Defn Die Folge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig in D gegen $f: D \to \mathbb{R}$ falls gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \ge 1 \text{ so dass } \forall n \ge N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

Bmk: In dieser defn. ist es wichtig, dass N nur von ε und nicht von $x \in D$ abhängt. Deswegen kommt die Bedingung "$\forall x \in D$" noch der "$\exists N \ge 1$"

/4

Bmk $f_n \xrightarrow{glm.} f$ gleichmässig. $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ punktweise

falls $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Defn. Eine Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig konvergent, falls für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ existiert und die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Satz Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D falls $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \geq 1$ s.d. $\forall n,m \geq N$ und $\forall x \in D$ $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Der Sinn des Gleichmässigkonvergenz-begriffs ist

Satz 3.7.4: Sei $D \subset \mathbb{R}$, und (f_n), $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Funk.folge bestehend aus in D stetigen Funktionen die gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $f : D \to \mathbb{R}$ in D stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$, und $\varepsilon > 0$ sei $N > 1$, so dass $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in D$. ($f_n \xrightarrow{glm} f$).

Da f_N in x_0 stetig ist, gibt es $\delta > 0$ s.d. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ (Da f_N stetig ist).

Dann folgt für $|x - x_0| < \delta$,

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|.$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

$\Rightarrow f$ ist in x_0 stetig.

$\Rightarrow x_0$ war beliebig $\Rightarrow f$ ist in D stetig.

Kor Sei $D \subset \mathbb{R}$, falls $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmässige konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ stetig.

Sei nun $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen.

Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

z.B. A Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $f_k(x) = c_k x^k$.

Defn. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ (in D) konvergiert gleichmässig falls die durch

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

definierte Funktionenfolge (S_n) gleichmässig konvergiert.

Satz 3.7.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen.

Wir nehmen an, dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D.$$

und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert

Dann konvergiert die Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmässig in D.

und deren Grenzwert

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ ist eine

in D stetige Funktion.

Beweis $S_n(x) := \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$

~~Sch~~ Sei $\varepsilon > 0$, $N \geq 1$ s.d.

$\forall n \geq N$ und $k \geq 1$ $\sum_{j=n+1}^{n+k} c_j < \varepsilon$

$$|S_{n+k}(x) - S_n(x)|$$

$$= \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j(x) \right|$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} c_j < \varepsilon$$

$\Rightarrow (S_n)$ ist in D gleichmässig konvergent und

deshalb $\lim S_n(x) =: f(x)$

ist in D stetig.

Wir wenden diesen Satz auf das Studium von Potenzreihen an.

Erinnerung: Die Potenzreihe

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konvergiert abs

für alle $|x| < \rho$

wobei $\rho = \begin{cases} \infty & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} = 0 \\ \dfrac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} & \text{falls } \limsup |c_k|^{1/k} > 0. \end{cases}$

d.h $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ konv $\forall r < \rho$.

Satz Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit Positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < \rho$.

Dann gilt: $\forall$ $0 \leq r < \rho$

konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf ~~...~~ $[-r, r]$.

insbesondere ist

$f:]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis Sei $f_k(x) = c_k x^k$ $k \geq 0$

Dann ist f_k auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Für $|x| \leq r < \rho$ gilt auch

$|f_k(x)| = |c_k x^k| \leq \underbrace{c_k r^k}_{C_k}$

Da $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$ konvergiert,

folgt aus Satz 3.7.9

dass $\sum c_k x^k$ auf $[-r, r]$ gleichm. konvergiert

Insbesondere

$$f : [-r, r] \to \mathbb{R}$$

stetig.

$$\left(f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right).$$

Da dies für aller $r < \rho$ gilt folgt, dass

$$f :]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$$

stetig ist.

§3.8. Trigonometrische Funktionen.

Wir definieren die **Sinusfunktion** für $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und die **Cosinusfunktion** für $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Aus Quotientenkriterium folgt dass die ~~beide~~ Reihen für alle $z \in \mathbb{C}$ abs. konvergieren.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{z^{2n+1}}\right|$$

$$= |z^2| \cdot \left|\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 < 1$$

$\forall z \in \mathbb{C}$.

Deswegen sind ρ = Konvergenzradius in beiden Fällen ∞ und es folgt dass

Satz : $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen.

Satz 1) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

2) $\cos(z) = \cos(-z)$

$\sin(-z) = -\sin z$

3) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

4) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

5) $\cos^2 z + \sin^2 z \neq 1 \quad \forall z$.

Kor $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

Beweis

1) $\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{2n} z^{2n}}{(2n)!}} + \sum \frac{(i)^{2n} \cdot i\, z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$(i)^{2n} = (-1)^n \Longrightarrow$.

$e^{iz} \equiv \cos z + i \sin z$

2) folgt aus defn.

3) folgt aus 1) und 2).

4) Folgt aus $e^{i(z+w)} = e^{iz} \cdot e^{iw}$

und aus (1) mit ausmultiplizierem,

5) Setze $w = -z$, 5) folgt aus 4).

§ 3.9 Die Kreiszahl. π

Bmk: Aus der Defn von $\sin x$ folgt dass $\sin 0 = 0$

Sei $x \geq 0$. Die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Ist alternierend.

Erinnerung. Satz (Leibniz)

Sei (a_n) mon fallend, $\lim a_n = 0$

Dann konv. $\sum (-1)^{n+1} a_n = S$

und gilt $\underline{a_1 - a_2 \leq S \leq a_1}$

Für $x \geq 0$ $a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ist

mon fallend $\Longleftrightarrow$

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{\cancel{(2n-1)!}\,(2n)(2n-1)} \leq \frac{x^{-1}}{\cancel{(2n-1)!}}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 \leq (2n)(2n+1) \quad \forall n \geq 1.$$

Also $x^2 \leq 6$ somit $x \leq \sqrt{6}$.

Kor $\forall\ 0 \leq x \leq \sqrt{6}$.

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x$$

Satz Die Sinusfunktion hat auf $]0, \infty[$ mindestens eine Nullstelle.

Sei $\pi := \inf \{t > 0 \mid \sin t = 0\}$.

Dann gilt 1) $\sin \pi = 0$, $\pi \in]2, 4[$

2) $\forall x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$.

3) $e^{i\pi/2} = i$

Kor 1) $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$.

2) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

3) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$

4) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) Nullstellen von $\sin x$

$= \{ k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$\sin x > 0 \quad \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$

$\sin x < 0 \quad \forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$

$k \in \mathbb{Z}$.

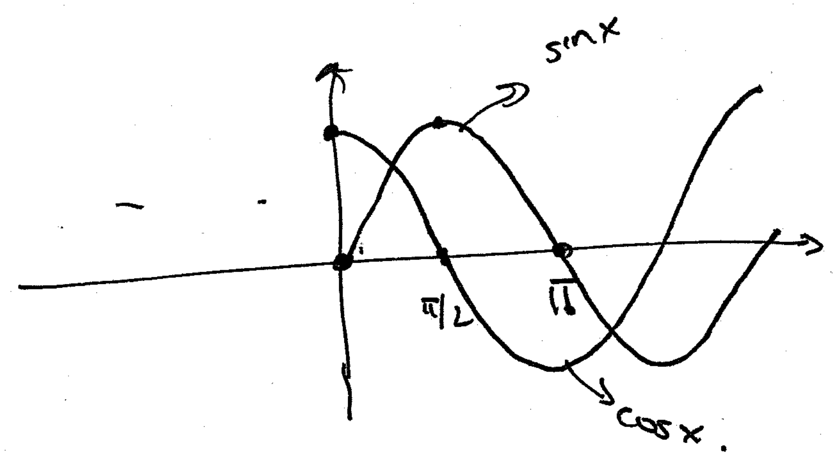
6) Nullstellen von $\cos x$

$= \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

$\cos x > 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$

$\cos x < 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (\frac{2k+1}{2})\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[$

$\forall k \in \mathbb{Z}$.



Für $z \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$, definieren wir Tangensfunktion

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

Für $z \notin \{\pi k\}$, definieren wir Cotangensfunktion

$\cot(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$.