$(f_n)_{n\geq 1}$ eine Funktionenfolge

$$f_n : D \to \mathbb{R}$$

<u>Defn</u> $(f_n)_{n\geq 1}$ <u>konvergiert punktweise</u> gegen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ falls

$$\boxed{\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon, x} > 0 \text{ so dass } \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

$$f_n \xrightarrow[p.w]{} f$$

<u>Defn</u> $(f_n)_{n\geq 1}$ <u>konvergiert gleichmässig</u> gegen $f: D \to \mathbb{R}$ falls

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \geq 1 \text{ so dass } \forall n \geq N,\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

$$f_n \xrightarrow[glm.]{} f$$

<u>Satz</u> Sei $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Funktionenfolge bestehend aus in D stetigen Funktionen. Falls $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig gegen f, dann ist f in D stetig.

<u>Bsp.</u> Falls (f_n) eine Folge stetiger Funktionen, und $f_n \to f$ punktweise Dann muss f nicht stetig sein !!

$f_n(x) := x^n \qquad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

Dann $f_n \xrightarrow[pw.]{} f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

f_n sind stetig $\forall n$, aber f ist nicht stetig.

—o—

$$\boxed{\begin{array}{l} (f_n) \text{ stetige Funktionen} \\ f_n \xrightarrow{glm} f \implies f \text{ ist stetig} \\ f_n \xrightarrow{p.w} f \not\Longrightarrow f \text{ ist stetig} \end{array}}$$!!

Sei $(f_k)_{k\geq 1}$ eine Funktionenfolge.

Defn Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ <u>konvergiert gleichmässig</u> falls die durch $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktionenfolge gleichmässig konvergiert.

Satz Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ Funktionenfolge stetiger Funktionen. Wir nehmen an dass $\underline{|f_n(x)| \leq c_n}$ $\forall x \in D$ und dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmässig und deren Grenzwert $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist stetig.

Satz Sei $\sum c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ und sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $|x| < \rho$. Dann gilt: $\forall$ $0 < r < \rho$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gleichmässig auf $[-r, r]$. Insbesondere ist $f:]-\rho, \rho[\to \mathbb{R}$ stetig.

Potenzreihen sind stetig im innern ihres Konvergenzbereichs.

Trigonometrische Funktionen

$$\sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Satz $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetige Funktionen

Satz 1) $\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

2) $\cos z = \cos(-z)$

$\sin(-z) = -\sin z$

3) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

4) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

5) $\boxed{\cos^2 z + \sin^2 z = 1}$

6) $\sin 2z = 2 \cos z \sin z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

Satz $\sin(0) = 0$

$x - \frac{x^3}{3} \leq \sin x \leq x$, $0 \leq x \leq \sqrt{6}$

Satz Die Sinus Funktion hat auf $]0, \infty[$ mindestens eine Nullstelle. Sei $\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin t = 0\}$

Dann gilt 1) $\sin \pi = 0$, $\pi \in]2, 4[$

2) $\forall x \in]0, \pi[$, $\sin x > 0$

3) $e^{i\pi/2} = i$

Kor 1) $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$

2) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

3) $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

4) Nullstellen von $\sin x = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin x > 0$ $\forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[$

$\sin x < 0$ $\forall x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[$

5) Nullstellen von $\cos x = \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos x > 0$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi[$

$\cos x < 0$ $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi[$

Tangensfunktion $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$, $z \notin \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$

cotangensfunktion $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$, $z \notin \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis (Idee)

1) Man zeigt

a) $\sin x > 0 \quad \forall x \in]0, 2]$

insbesondere $\sin 2 > 0$.

b) $\sin 4 < 0$

Dann, nach ZWS gibt es in $]2, 4[$ mindestens eine Nullstelle for $\sin x$.

Aus der defn von $\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin t = 0\}$ und Stetigkeit von $\sin x$ folgt dass $\sin \pi = 0$ und auch dass $\pi \in]2, 4[$.

2) Um zu zeigen dass $\sin x > 0$ $\forall x \in]0, \pi[$, bemerken wir dass $\sin x$ auf $]0, \pi[$ keine Nullstelle besitzt, da $\pi = \inf\{t > 0 \mid \sin t = 0\}$

Nun $0 < 1 < 2 < \pi$ und

$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6} > 0$$

Falls es $y \in]0, \pi[$ gibt mit $\sin y < 0$, dann aus $\sin(1) > 0$ und dem ZWS die Existenz von $z \in]1, y[$ folgen mit $\sin z = 0$.

Insbesondere $0 < z < \pi$.

Das ist ein Widerspruch zur defn von π

3) Winkeldopplungsformel

$$0 = \sin \pi = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[\implies \sin \frac{\pi}{2} > 0 \quad (2).$$

$$\implies \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Aus $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ folgt dass $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

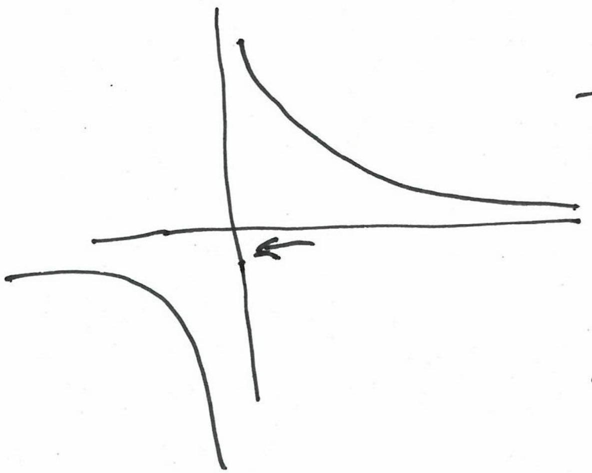
§ 3.10 Grenzwerte von Funktionen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$.

Wir werden Grenzwerte von f definieren wenn $x \in D$ gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}$ strebt.

x_0 muss nicht in D sein.

$f(x) = \frac{1}{x}$

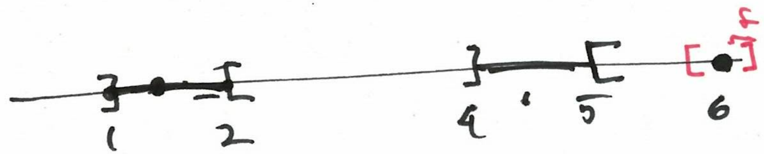


Wir nehmen an dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein "Häufungspunkt von D" ist.

Defn. $x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt der Menge D, falls $\forall \delta > 0$

$$(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$$

$D =]1, 2[\cup]4, 5[\cup \{6\}$.



$D' =$ Menge der Häufungspunkte von D

$= [1, 2] \cup [4, 5]$.

$6 \notin D'$. z.B. wir können als $\delta = \frac{1}{2}$ nehmen, dann

$$(]6-\delta, 6+\delta[\setminus \{6\}) \cap D = \emptyset.$$

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Dann ist $A \in \mathbb{R}$ der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, bezeichnet mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ falls $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so dass

$\forall x \in D \cap (\,]x_0-\delta, x_0+\delta[\, \setminus \{x_0\})$:

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Bmk. 1) Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet x kommt der Stelle x_0 beliebig nähe ohne sie jedoch jemals zu erreichen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen dass die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 <u>nicht</u> definiert sein muss.

2) Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$

Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall (a_n)_{n \geq 1} \in D \setminus \{x_0\} \text{ mit } \lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = A.$$

3) Sei $x_0 \in D$. Dann ist

$$f \text{ in } x_0 \text{ stetig} \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz Falls $f, g: D \to \mathbb{R}$ und

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B$$

existieren so folgt

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f + \lim_{x \to x_0} g = A + B$$

$$\lim (fg)(x) = (\lim f)(\lim g) = AB.$$

Satz (Sandwich Satz) Falls $g_1 \leq f \leq g_2$ mit

$$\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x) = L, \text{ dann}$$

existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Bsp. Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$, Dann gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis Für $0 < x \le \sqrt{6}$,

$$x - \frac{x^3}{3!} \le \sin x \le x$$

$\Rightarrow$ Falls $x \in]0, \sqrt{6}]$

$$1 - \frac{x^2}{6} \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Da x^2, $\frac{\sin x}{x}$ gerade Funktionen sind

diese Ungleichungen gelten

auch für $-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}$, $x \neq 0$.

$1 - \frac{x^2}{2}$ ist stetig $\Rightarrow \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{0^2}{2} = 1$

1 ist stetig $\Rightarrow \lim_{x \to 0} 1 = 1$

Nach Sandwich satz, erhalten wir dass

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

~~Da~~ Linkseitige und Rechtseitige Grenzwert.

Defn. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

wir nehmen an, dass

x_0 ein Häufungspunkt von $D \cap]x_0, +\infty[$

Falls der Grenzwert der eingeschränkten Funktion $f|_{D \cap [x_0, \infty)}$ für $x \to x_0$ existiert, wird er mit $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ bezeichnet und nennt sich rechtsseitigen Grenzwert von f bei x_0

Analog Falls der Grenzwert der Funktion $f\big|_{D\cap]-\infty,x_0]}$ für $x\to x_0$ existiert, wird er mit

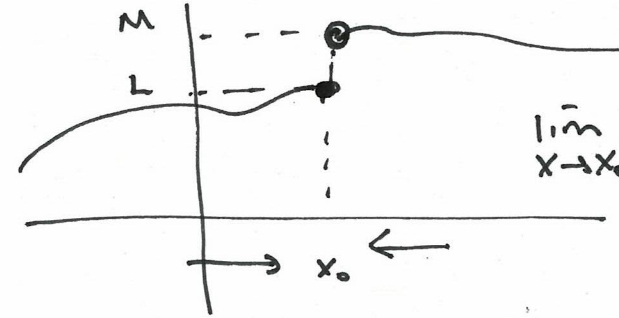
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

bezeichnet und nennt sich linkseitiger Grenzwert von f.

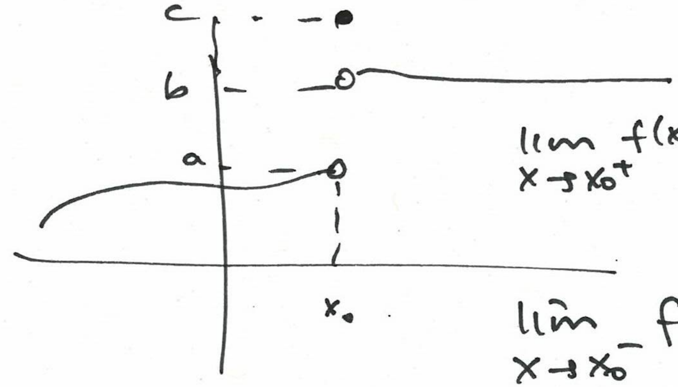
<u>Bmk.</u> Man kann auch die Definition von Grenzwert mit Folgen benutzen.

Falls für jede von links her gegen x_0 strebende Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$, die Folge $f(x_n)$ konvergiert, so heisst $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ der Linkseitige Grenzwert von $f(x)$ für $x\to x_0^-$ und mit $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ bezeichnet.

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = M$$



$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = f(x_0)$$

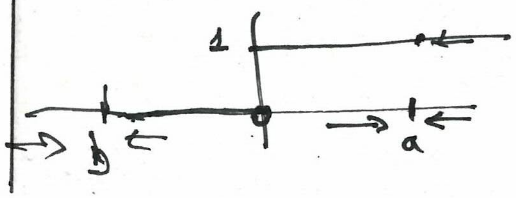


$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$$

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ nicht existiert $\qquad f(x_0) = c.$

<u>Bsp.</u> $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$



$\lim_{x\to 0^+} f = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f = 0.$

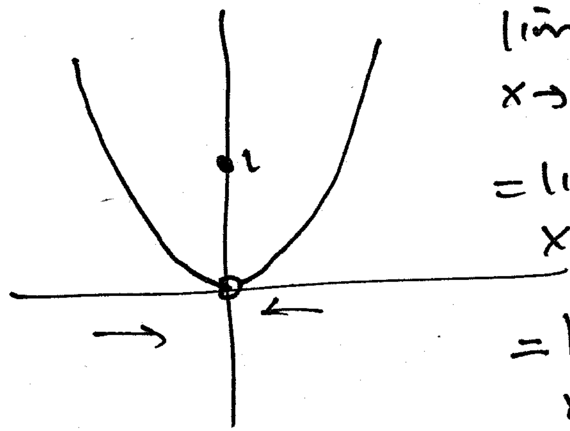
$$\lim_{x \to a} f(x) = 1 = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to b} f(x) = 0 = \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Bmk Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert L, so gilt

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Bsp. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Aber $f(0) = 1 \neq \lim_{x \to 0} f(x) = 0.$

deswegen besitzt f an der Stelle $x=0$ einen Grenzwert aber sie ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

Wir erweitern diese Defn auf

$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty}$ falls gilt

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \\ \forall x \in \,]x_0, x_0+\delta[\, \cap D : \\ f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \end{array}}$$

(Da $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ so dass $\varepsilon < 1/N$ kann man auch diese defn so schreiben.

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall N > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0+\delta[\\ f(x) > N. \end{array}}$$
)

Analog $\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty}$ falls gilt

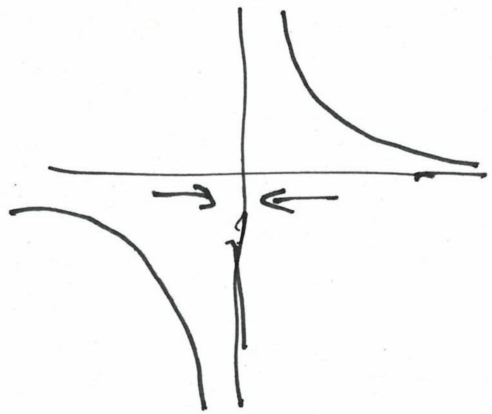
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0+\delta[\, : \\ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon} \end{array}}$$

oder

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall N > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap \,]x_0, x_0+\delta[\, : \\ f(x) < -N. \end{array}}$$

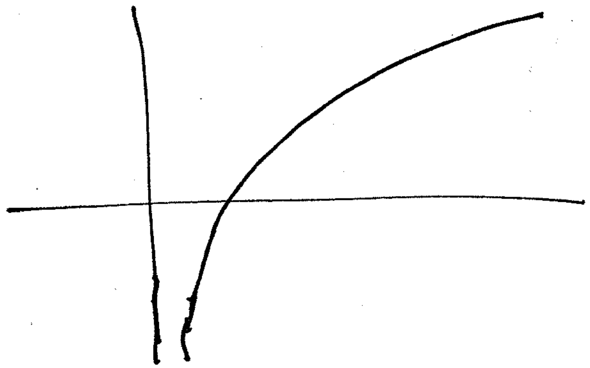
Bsp. Mit dieser defn gilt

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Bsp. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.



Sei $N > 0$ gegeben. Sei $\delta = e^{-N}$.

Da $\ln x$ streng mon. wachsend ist,

falls $x < \delta = e^{-N}$

dann $\ln x < \ln \delta = \ln e^{-N} = -N$.

Somit $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

Bsp. Für $a > 0$, ist $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = 0$.

Aus $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ folgt

dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, ein $\delta > 0$

gibt so dass

$$0 < x < \delta \implies \ln x < -n.$$

Und da $a > 0$

$$a \ln x < -an.$$

$(x^a = \exp(a \ln x))$.

Da exp. streng mon. wachsend ist

$$x^a = \exp(a \ln x) < \exp(-an) = e^{-an} = (e^{-a})^n.$$

Nun. wird $n \in \mathbb{N}$ beliebig gross

$\exp(-an) = \exp(-a)^n$ beliebig klein

da $\exp(-a) < 1$.

Woraus folgt $\lim_{x \to 0^+} x^a = 0$.

Grenzwerte im Unendlichen

In vielen Fällen untersuchen wir das Verhalten einer Funktion wenn die Variable x sich immer weiter vom Ursprung in positiver ($x \to +\infty$) bzw negativer ($x \to -\infty$) Richtung entfernt.

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$. Ist D nach oben unbeschränkt, so hat $f(x)$ für $x \to \infty$ den Grenzwert $L \in \mathbb{R}$ falls gilt:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0 : \forall x \in D \quad x > C \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

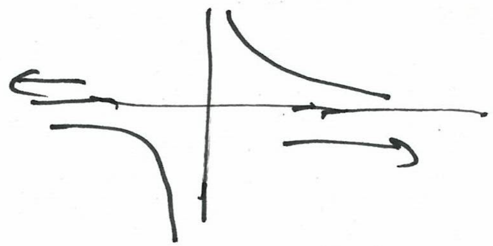
In diesem Fall schreiben wir $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

Analog falls gilt dass

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0 : \forall x \in D \quad x < -C \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

Dann so hat $f(x)$ für $x \to -\infty$ den Grenzwert L.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$



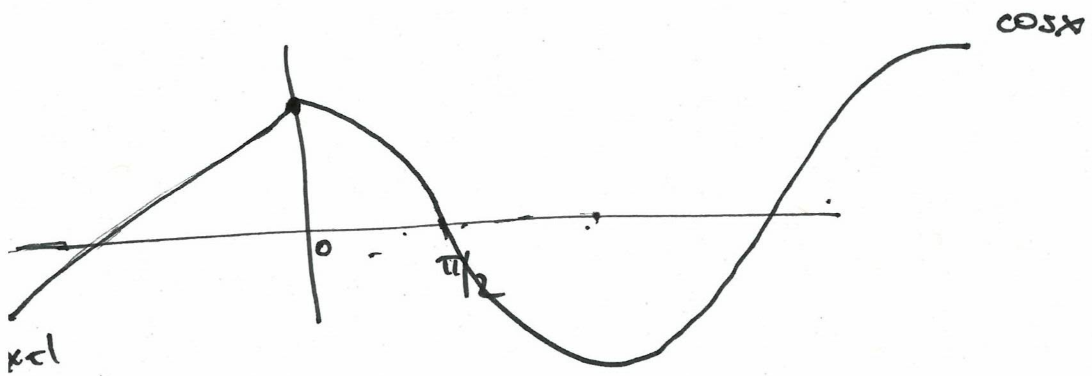
Bsp. $f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Bmk: Die Stetigkeit einer abschnittweise definierten Funktion hängt nicht nur von Ihren Abschnittfunktionen, sondern auch vom Verhalten an den Grenzen vom Abschnitts Intervalle.

Bsp. $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0. \end{cases}$



f in jeder Stelle $x \neq 0$ stetig, Da $\cos x$, $x+1$ stetig sind,
Wir müssen nur Stetigkeit in $x=0$ studieren.

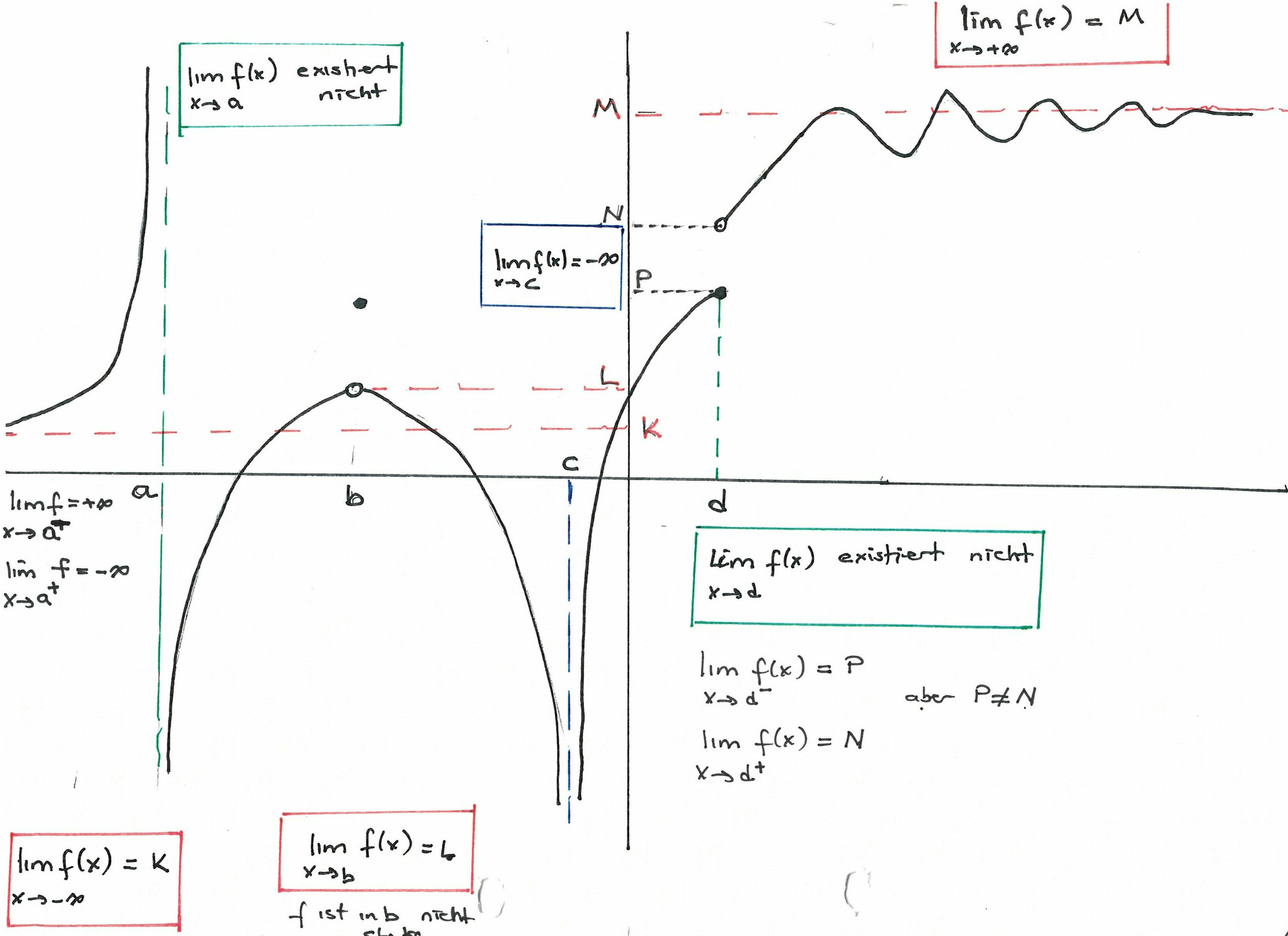
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x+1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

$\Rightarrow$ f ist auch in $x_0 = 0$ stetig.



$\lim_{x \to a} f(x)$ existiert nicht
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$
M
N
$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$
P
L
K
a
b
c
d
$\lim_{x \to a^{-}} f = +\infty$
$\lim_{x \to a^{+}} f = -\infty$
$\lim_{x \to d} f(x)$ existiert nicht
$\lim_{x \to d^{-}} f(x) = P$
aber $P \neq N$
$\lim_{x \to d^{+}} f(x) = N$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$
$\lim_{x \to b} f(x) = L$
f ist in b nicht stetig.