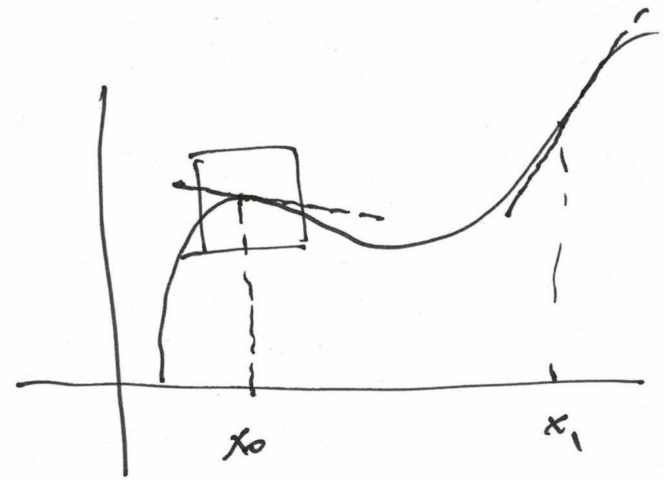
§4. Differenzierbare Funktionen

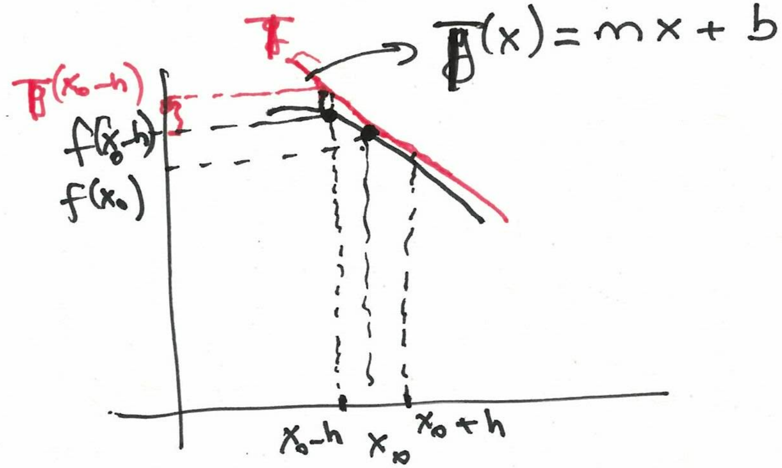
Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$.

Thema:
Die Berechnung lokaler Veränderungen von Funktionen.

Der Begriff der Ableitung

Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir wollen f in der Nähe von x_0 durch eine Gerade approximieren.
Die Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ stellt eine gute Approximation dar.



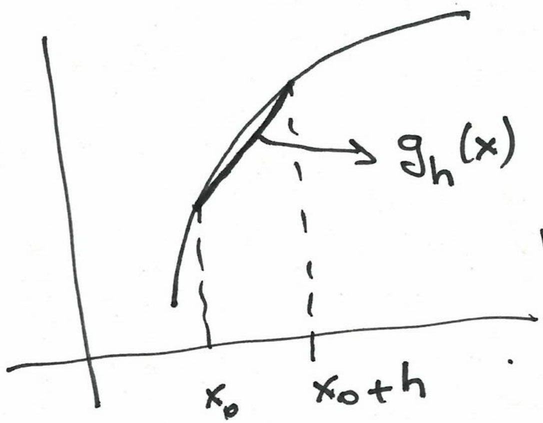


1

Was ist $m =$ die Steigung der Tangente?

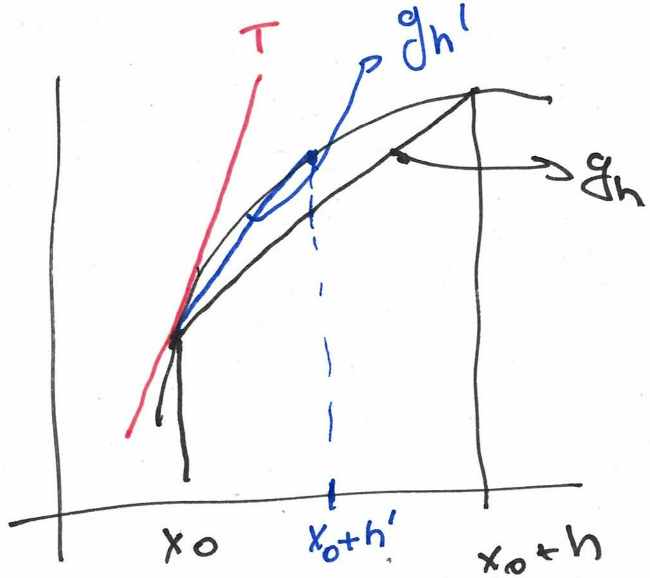
Diese erhalten wir aus der Sekante auf durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$, analytisch beschrieben durch die Geradengleichung

$$g_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$



$h \to 0.$

indem wir den Grenzübergang $h \to 0$ vornehmen.



$h \to 0.$

~~Bi~~ Wir betrachten den sogenannten Differenzquotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{die Steigung der Sekante } g_h$$

/2

Wir wollen die Steigung der Tangente als die Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

erhalten.

Defn. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, ein Häufungspunkt.
f heisst in x_0 differenzierbar falls der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

existiert. In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet und er heisst die Ableitung (das Differential) von f an der Stelle x_0.

f heisst auf D differenzierbar falls für jeden Häufungspunkt $x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist.
In diesem Fall, definiert die Kollektion aller $x_0 \mapsto f'(x_0)$ eine neue Funktion.

Die Funktion $\begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$ heisst die Ableitungsfunktion von f.

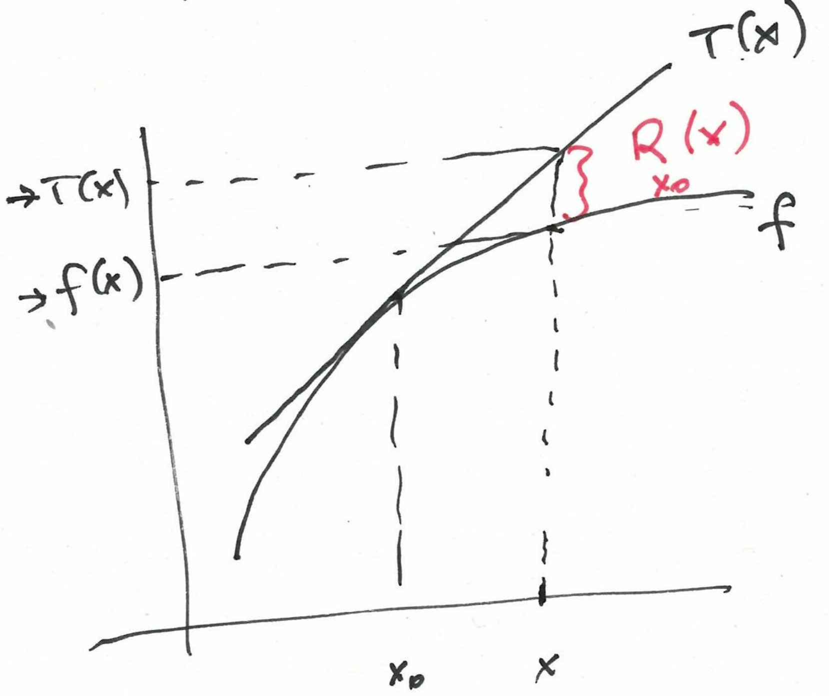
Bmk Der Graph einer differenzierbaren Funktion lässt sich linear durch eine Tangente annähren.

Sei $x_0 \in D$, f diff. in x_0.

Die Tangent in Punkt $(x_0, f(x_0))$

hat die Gleichung

$$\underline{T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$



$T(x)$ ist eine gute Näherung für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0?

Sei $f(x) = \underset{\sim}{T(x)} + R_{x_0}(x)$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_{x_0}(x)$$

Falls $x - x_0 \neq 0$. dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0}.$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(f'(x_0) + \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} \right)$$

$$f'(x_0) = f'(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0.$$

d.h.: wenn $x \to x_0$ strebt, strebt die Restglied schneller nach 0 als $x - x_0$.

Sei $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{falls } x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

Dann $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0 = r(x_0)$

d.h. $r(x)$ ist in x_0 stetig.

und gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0).$$

d.h. falls f in x_0 diff. ist, dann es gibt $c \in \mathbb{R}$ $(c = f'(x_0))$ und $r: D \to \mathbb{R}$ mit

1) $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$
2) $r(x_0) = 0$.

$c = f'(x_0)$ ist eindeutig bestimmt

Satz (Weierstrass)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Folgende Aussagen sind äquivalent.

1) f ist in x_0 differenzierbar.
2) Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r: D \to \mathbb{R}$ mit
   2a) $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)(x-x_0)$
   2b) $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0.

Falls dies zutrifft ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) schon gesehen.
(2) $\Rightarrow$ (1) Übung.

wir setzen

$$\phi(x) = f'(x_0) + r(x),$$

dann erhalten wir

Satz f ~~ist~~ $: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x_0 differenzierbar, falls es eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ gibt die

a) in x_0 stetig ist

b) $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$ $\forall x \in D$ gilt.

In diesem Fall gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$.

Kor Sei $f : D \to \mathbb{R}$ $x_0 \in D$

Falls f in x_0 differenzierbar ist, so ist f stetig in x_0

d.h. f diff. in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0.

Beweis: f diff in x_0

$\Rightarrow \exists\, \phi(x)$ stetig in x_0

so dass

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0).$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \phi(x)(x - x_0)}_{\underbrace{\phi(x_0)\lim_{x \to x_0}(x - x_0)}_{0}}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ stetig.}$$

Bsp. 1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto k$

k konstant. Dann ist $f'(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(x_0) = k - k = 0.$$

somit $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \quad \forall x \neq x_0$

Somit existiert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto mx + b$

ist überall diff. und

$f'(x) = m.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{(mx+b)-(mx_0+b)}{x-x_0}$$

$$= \frac{m(x-x_0)}{x-x_0} = m,$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = m.$$

3) $f(x) = x^2$ ist diff $\forall x \in \mathbb{R}$

mit $\underline{f'(x) = 2x}$.

$f'(x_0) =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

$$= \lim \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}.$$

$$= \lim \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx_0 + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h$$

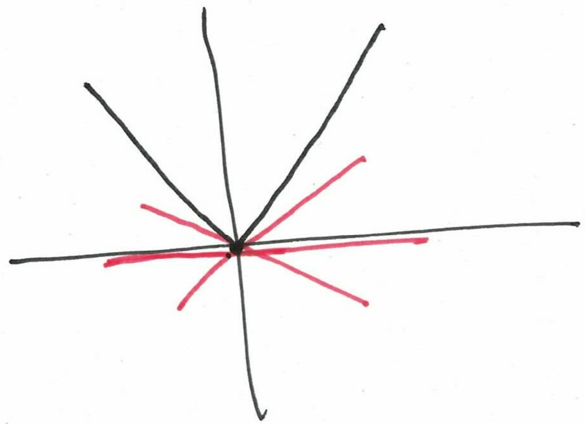
$$= 2x_0.$$

/7

4) Sei $f(x) = |x|$

ist für alle $x_0 \neq 0$ diff.

aber nicht für $x_0 = 0$.



$$f(x) = f(x) - f(0) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Also $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-}$ " $= -1$

$\to \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nicht existiert.

<u>Vorsichtig!</u>

f diff $\Rightarrow f$ stetig

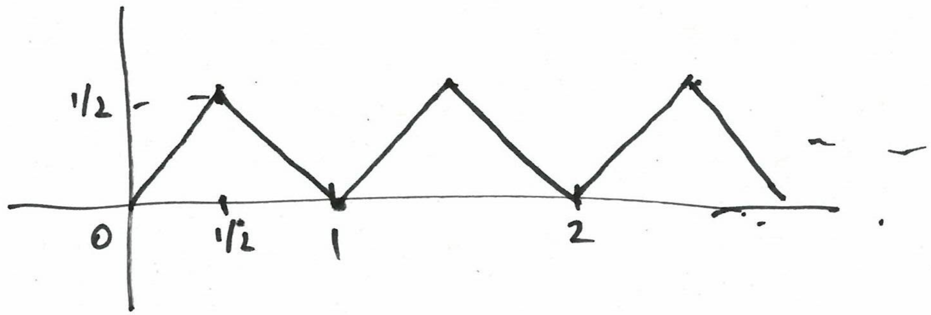
f stetig $\not\Rightarrow f$ diff.

5) Es gibt stetige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an keine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

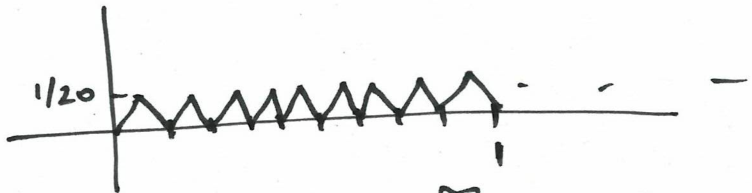
Sei für $x \in \mathbb{R}$ $g(x) := \langle x \rangle$

$:=$ Distanz von x zur nächsten ganzen Zahl.

$x \to g(x)$



$x \mapsto \frac{g(10x)}{10}$



~~Sei~~ Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$

Dann ist die Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmässig konvergent und deswegen f ist stetig.

Man kann zeigen dass f in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ diff. ist.

Bsp. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differen. mit $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$

Beweis Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $x = x_0 + h \neq x_0$

$$\exp(x_0+h) - \exp(x_0) = \exp(x_0)\left[\exp h - 1\right].$$

z.z. $\dfrac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \exp(x_0)$

$$\frac{\exp h - 1}{h} = \frac{\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1}{h}$$

$$= 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots$$

$$\left|\frac{\exp h - 1}{h} - 1\right| = |h| \left(\frac{1}{2!} + \frac{|h|}{3!} + \frac{|h|^3}{4!} + \cdots\right)$$

$$\leq |h| \underbrace{\underbrace{\left[1 + |h| + \frac{|h|^2}{2!} \cdots\right]}_{\exp|h|}}_{\to 0 \cdot 1 \text{ als } h \to 0}.$$

und somit

$$\exp'(x_0) = \lim \frac{\exp(x_0+h) - \exp(x_0)}{h}$$

$$= \exp(x_0) \lim \left(\frac{\exp h - 1}{h}\right) =$$

$$\exp(x_0)$$

$\boxtimes$.

Bsp. $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

und $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Beweis $\underbrace{\sin(x+h)}_{} - \sin x$

$$= \left(\sin x \cos h + \cos x \sinh\right) - \sin x$$

$$= \sin x \left[\cos h - 1\right] + \cos x \cdot \sin h.$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}.$$

Als $h \to 0$.

$$\frac{\sin h}{h} \to 1$$

$$\frac{\cosh - 1}{h} \to 0. \quad \text{(Übung)}.$$

Somit

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sin x \left(\frac{\cosh - 1}{h}\right) \to 0 + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} \to 1$$

$$= \cos x.$$

f	f'
1	0
x	1
x^2	$2x$
$\exp x$	$\exp x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$.

Rechenregeln für die Ableitung.

Satz Sei $D \subset \mathbb{R}$

$f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 diff.

Dann gelten

1) $f+g$ ist in x_0 diff und

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

2) fg ist in x_0 diff

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}$$

3) Falls $g(x_0) \neq 0$ ist, f/g in x_0 diff. und

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.}$$

Beweis 2)

$$f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) / x - x_0$$

$$= \left[\left(f(x) - f(x_0) \right) g(\cancel{x_0}) + f(x_0) \left[g(x) - g(x_0) \right] \right] / x - x_0 .$$

$$= \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] g(x) + f(x_0) \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]$$

Da g in x_0 diff. ist, ist g in x_0 stetig. $\Longrightarrow$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \left(\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \lim g(x) + f(x_0) \lim \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)$$

$$= f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) .$$

Bsp. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

ist auf Ihrem Definitionsbereich diff und

$$\tan'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} .$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Bsp. $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

Bsp. $(x^n)' = n x^{n-1}$

Beweis Induktion. + produktregel.

$n=1$ $\quad (x^1)' = 1.$

$n=2$ $\quad (x^2)' = 2x$

Wir nehmen an: $(x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$

Dann $\quad x^n = x \cdot x^{n-1} \Longrightarrow$ Produktregel anwenden.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (x^n)' &= 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' \\
&= x^{n-1} + (n-1)x \cdot x^{n-2} \\
&= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} \\
&= [(n-1)+1]\,x^{n-1} = n x^{n-1}
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Satz (Kettenregel)

Seien $E, D \subseteq \mathbb{R}$.

$f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$

f in x_0 diff. und g in $y_0 = f(x_0)$ diff. Dann ist

$g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 diff

und

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).}$$

Bsp.: 1) $h(x) = \exp(x^3+1)$

$$h'(x) = \exp'(x^3+1) \cdot (x^3+1)'$$
$$= \exp(x^3+1)\,[3x^2+0].$$
$$= 3x^2 \exp(x^3+1)$$

2) $H(x) = \sin(x^2+5)$

$$H'(x) = \sin'(x^2+5) \cdot (x^2+5)'$$
$$= \cos(x^2+5) \cdot 2x.$$

3) $\left(11x^5+3x+1\right)^{101} = G(x)$

$$G'(x) = 101\,(11x^5+3x+1)^{100} \cdot (55x^4+3)$$

$g(y) = y^{101}$ $\quad f(x) = (11x^5+3x+1)$

$g'(y) = 101y^{100}$

Kor 4.1.12. Sei $f: D \to E$ ein bijektive Funktion, $x_0 \in D$ ein Häufungspkt. Wir nehmen an dass f in x_0 diff und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $y_0 := f(x_0)$ ein Häufungspkt von E und f^{-1} ist in y_0 diff und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis Idee Falls wir schon bewiesen dass f^{-1} diff. in y_0 ist, so folgt

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\xRightarrow{\text{Kettenregel.}} (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = (x)' = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Falls $f'(x_0) \neq 0$.

Vorsichtig! Die Annahme $f'(x_0) \neq 0$ ist wichtig.

Bsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

ist überall diff. und bijektiv.

Die Umkehrfunk.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{1/3}$.

ist stetig, ist aber in 0 nicht diff:

$a \in \mathbb{R}$: $h:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$

ist diff mit Ableitung $h'(x) = a x^{a-1}$.

$$g'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{2/3}}$$

oder direkt!

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^{1/3} - 0}{h}$$

$$= h^{-2/3} = \frac{1}{h^{2/3}} \xrightarrow[h \to 0]{} \infty.$$

$g(x)$ ist in $x = 0$ nicht diff.!!

Was ist passiert an der Stelle $x=0$?

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$!!!

Die Annahme $f'(x_0) \neq 0$ ist wichtig!