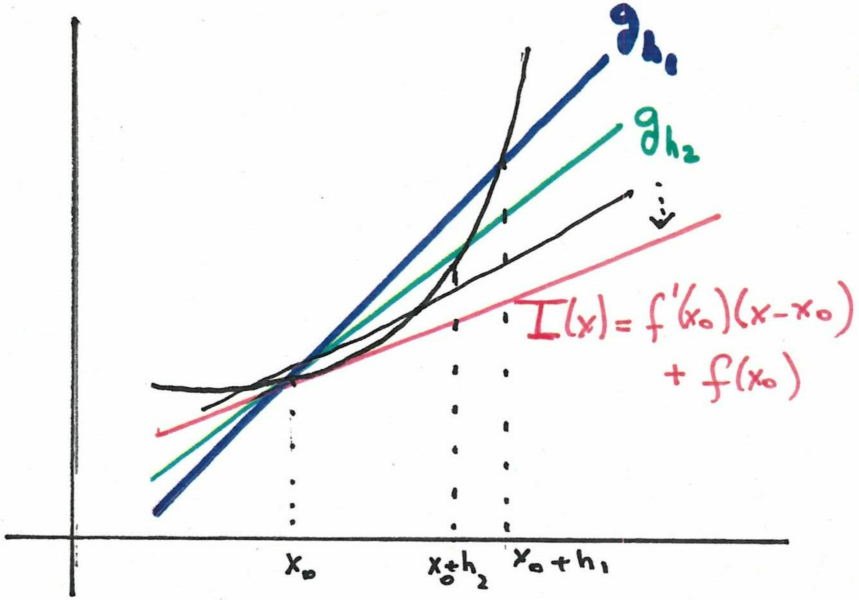
Die Ableitung

Die geometrische Entsprebung der Ableitung ist die Tangentensteigung



Analytisch: Wir betrachten den Grenzwert von der Steigung der Sekante

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Defn Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, Häufungspunkt

f heisst in x_0 differenzierbar

falls der Grenzwert

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0)}$$

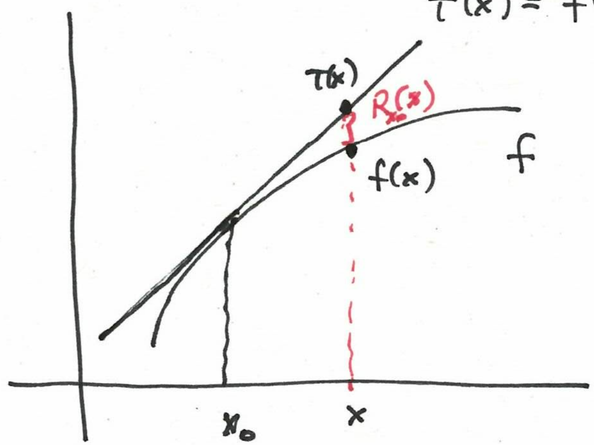
existiert.

In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet und er heisst die Ableitung von f an der Stelle x_0.

f heisst auf D differenzierbar falls sie in jede Häufungspunkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist.

$$\begin{aligned} D &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$ heisst die Ableitungsfunktion von f.

- Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann lässt sie sich linear durch die Tangente annähren



$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$R_{x_0}(x) = T(x) - f(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0.$$

Sei $r(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{falls } x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

Dann $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0 = r(x_0)$; d.h. $r(x)$ ist in x_0 stetig.

Satz $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Folgende Aussagen sind äquivalent

1) f ist in x_0 differenzierbar
2) Es gibt $c \in \mathbb{R}$ und $r: D \to \mathbb{R}$ mit
   a) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
   b) $r(x_0) = 0$ und r ist in x_0 stetig.

Falls dies zutrifft, ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt

Wir setzen $\phi(x) = f'(x_0) + r(x)$

dann erhalten wir

$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Satz}\quad f \text{ ist in } x_0 \text{ diff} \Longleftrightarrow \\ \quad\text{Es gibt eine Funktion } \phi : D \to \mathbb{R} \\ \quad\text{die a) in } x_0 \text{ stetig} \\ \quad\quad\text{b) } f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0) \quad \forall x \in D \text{ gilt.} \\ \text{In diesem Fall } \phi(x_0) = f'(x_0).\end{array}}$

$\boxed{\textbf{Kor}\quad f \text{ ist diff in } x_0 \Longrightarrow f \text{ ist stetig in } x_0}$

Bmk f ist stetig in x_0 $\not\Longrightarrow$ f ist in x_0 diff

Bsp: $f(x) = |x|$

Bsp.

f	f'
c	0
x^n	$n x^{n-1}$ →
$\exp x$	$\exp x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$ →
$\ln x$	$1/x$
x^a	$a x^{a-1}$

Rechnenregeln für die Ableitung

Satz Sei $f; g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 diff.

Dann gelten

1) $f+g$ ist in x_0 diff. und

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

2) fg ist diff. in x_0

$$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)}$$

3) f/g ist in x_0 diff falls $g(x_0) \neq 0$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}}$$

Satz (Kettenregel) $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}$

f ist in x_0 diff und g ist in $y_0 = f(x_0)$ diff.

Dann ist $g \circ f$ in x_0 diff und

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)}.$$

Satz sei $f : D \to E$ bijek, und in x_0 diff. Wir nehmen an dass

!! $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ diff. und

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}.$$

Bsp $\ln x :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x$$

Dann $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0,\infty[$.

Beweis $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(\ln(\exp x))' = (x)'$$

$$\ln'(\exp x) \cdot (\exp(x))' = 1.$$

$$\Rightarrow \ln'(y) \cdot y = 1$$

wobei

$$y = \exp x$$

~~Somit~~ $\ln'(y) = \frac{1}{y}$

Bsp. Sei $x^a = \exp(a \ln x)$, $x > 0$

Dann gilt $(x^a)' = a x^{a-1}$

Übung.

§4.2 Zentrale Sätze über die erste Ableitung.

Wir werden die Ableitung einer Funktion studieren und wir werden sehen ~~dass die Ableitung~~ dass wir die Ableitung benutzen können um die extremalstelle (min. stelle, max stelle) einer Funktion zu finden.

Defn. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

1) f besitzt ein lokales Maximum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap D$.

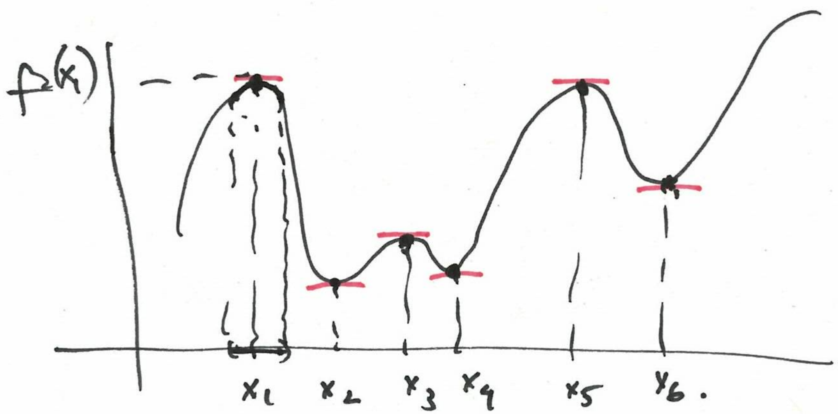
d.h $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, folgt dass

$$f(x) \leq f(x_0)$$

2) f besitzt ein lok. minimum in x_0 falls es $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap D.$$

3) f besitzt ein Extremum in x_0 falls es entweder ein lok. min oder max von f ist.



x_1, x_3, x_5 lok. max

x_2, x_4, x_6 lok. min.

In dieser Punkte die Steigung der Tangente 0 ist.
Die Tangente ist waagrecht
Horizontal.

Satz sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$. Wir nehmen dass f in x_0 diff. ist.

1) Falls $f'(x_0) > 0$, gibt es $\delta > 0$ mit

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$$

und

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$$

2) Falls $f'(x_0) < 0$, gibt es $\delta > 0$ mit

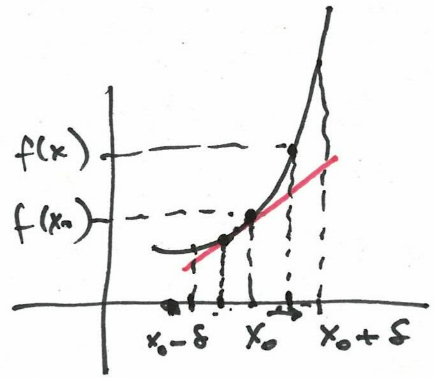
$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$$

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$$

3) Falls f in x_0 ein loc. Extremum besitzt folgt $f'(x_0) = 0$.

d.h x_0 ein lok. Extreme $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Defn Ein kritische Stelle einer Funktion ist ein x_0 an der $f'(x)$ null oder undefiniert ist.



Beweis f ist in x_0 diff $\Longleftrightarrow$

$\exists\ \phi :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig in x_0

und $\phi(x_0) = f'(x_0)$ und

$f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$

ϕ ist in x_0 stetig und $\phi(x_0) = f'(x_0) > 0$,

$\Longrightarrow$ gibt es $\delta > 0$ ~~...~~ so dass

$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[,\ \phi(x) > 0.$

(Stetige Funktionen kann ihren Wert nicht plötzlich ändern).

Dann folgt dass für $x \in]x_0, x_0 + \delta[$
so dass $x - x_0 > 0$ und $\phi(x) > 0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{>0} > f(x_0)$$

Falls $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, dann $(x - x_0) < 0$, $\phi(x) > 0$

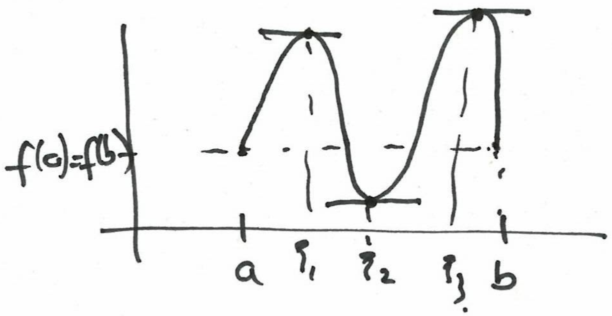
$$\Longrightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{\phi(x)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{<0}$$

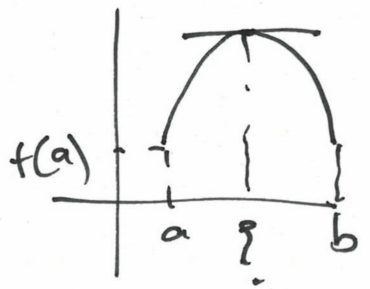
$\Longrightarrow f(x) < f(x_0)$ falls $x \in]x_0 - \delta, x_0[$

2) Analog. Man kann (1) auf $-f$ anwenden.

3) Falls f in x_0 ein lok. ext. besitzt dann wegen (1) und (2) weder $f'(x_0) > 0$ noch $f'(x_0) < 0$ gelten. Also $f'(x_0) = 0$.

Satz (Rolle) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $]a,b[$ differenzierbar.
Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es mindestens ~~eine~~ Punkt $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.





Beweis: f ist stetig in $[a,b]$. Dann folgt aus Min-Max Satz dass es $u,v \in [a,b]$ gibt mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [a,b].$$

Falls eines der beiden $u,v \in]a,b[$ liegt, nennen wir es ξ. Dann hat f in ξ ein lok. Extremum und folgt dass $f'(\xi)=0$, und der Satz ist bewiesen.

Falls aber $\{u,v\} = \{a,b\}$, folgt

$$f(u) = f(v) = f(a) = f(b)$$

und somit ist f konstant und folgt dass $f'(\xi)=0 \quad \forall \xi \in]a,b[$.

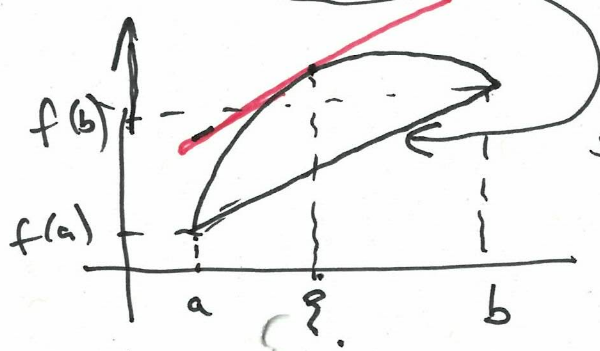
Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des Mittelwertsatzes von Lagrange.

Satz (Mittelwertsatz). Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

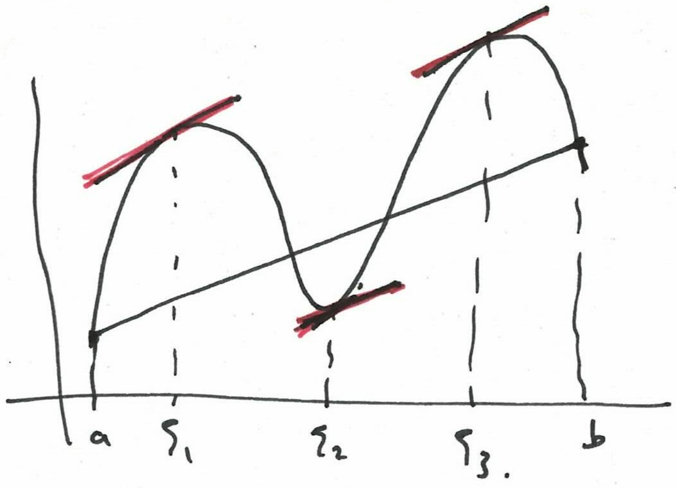
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

d.h. $\exists\, \xi \in]a,b[$ s.d.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$



Steigung der Sekante.



Beweis: Die Gleichung der Geraden durch $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ ist

$$g(x) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a) + f(a)$$

Setze, $h(x) = f(x) - g(x)$ und wende den Satz von Rolle an.

Übung.

Kor Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $]a,b[$ diff.

1) Falls $f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in]a,b[$ dann ist f konstant.

2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi) \quad \forall \xi \in]a,b[$ dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit
$f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in]a,b[$.

3) Gilt für alle $x \in]a,b[$ dass
$f'(x) > 0$, dann ist f streng mon. wechsend.

Gilt für alle $x \in]a,b[$ dass

4) $f'(x) \geq 0$, dann ist f mon. wach.

5) $f'(x) < 0$, dann ist f streng mon. fallend.

6) $f'(x) \leq 0$, dann ist f mon. fallend.

7) Falls es $M \geq 0$ gibt mit
$|f'(\xi)| < M \quad \forall \xi \in]a,b[$, dann
folgt $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$,
$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$.

Beweis (Kor)

1) Seien $a < x < y < b$ beliebig.
und sei nach Mittelwertsatz

$x_0 \in]x, y[$ mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{y - x} = f'(x_0)$$

Da $f'(x_0) = 0$, $\forall x_0 \in]a, b[$,
folgt dass $f(x) - f(y) = 0$

$\Rightarrow f(y) = f(x)$.

Da x, y beliebig waren, ist f konstant.

2) folgt aus (1) angewendet auf $f - g$.

3) Sei $f'(x) > 0$ $\forall x \in]a, b[$

z.z. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Seien $a < x < y < b$ beliebig
und $x_0 \in]x, y[$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0) > 0.$$

und $y - x > 0$

$\Rightarrow f(y) - f(x) > 0$.

$\Rightarrow f(y) > f(x)$.

$\Rightarrow f$ ist strikt $\nearrow$.

Nun wenden wir dieser Satze auf Trig. Funktionen, und ihre umkehr~~Funktionen~~ionen.

Trigon. Funktionen.

1) arcsin:

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$

streng mon. wach., bijek.

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

$\sin'(x) = \cos x > 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Insbesondere $\sin'(x) \neq 0$.

Nach ~~Umkehr~~ Kor 4.1.12, ist die Umkehr Funktion $\arcsin y$ auf $]-1,1[$ differenzierbar, und

Für $y = \sin x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

folgt dass:

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

Nun müssen wir $\cos x$ als eine Funktion in y schreiben.

Dafür benützen wir

$$\underbrace{\sin^2 x}_{y^2} + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - y^2$$

Da $\cos x > 0$, folgt dass

$$\cos x = \sqrt{1 - y^2}$$

Somit erhalten wir $\forall y \in]-1,1[$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

2) **arccos**:

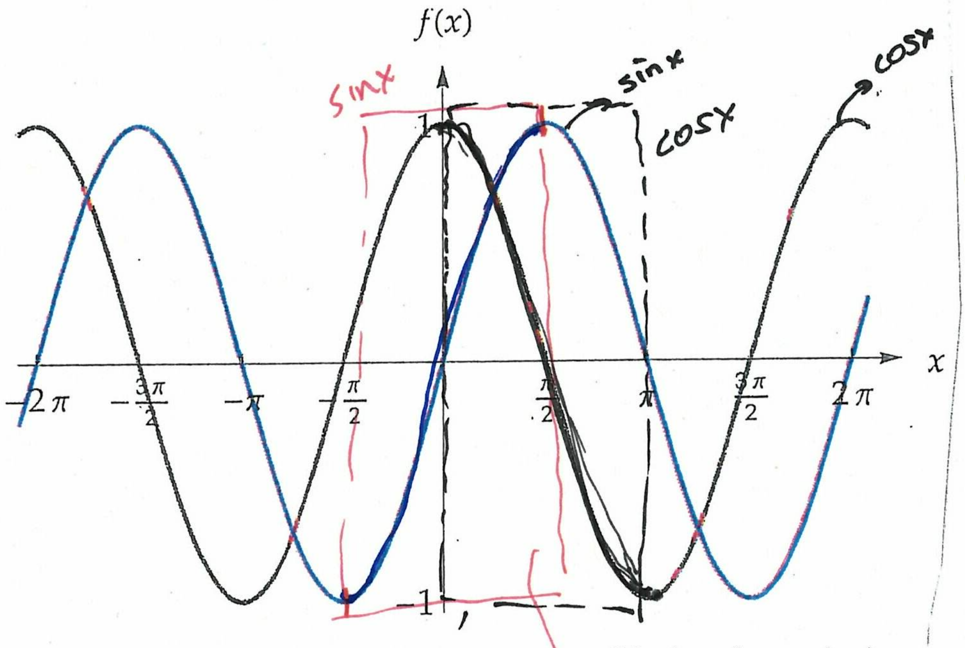
$\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$

ist strikt mon. fallend, bijektiv

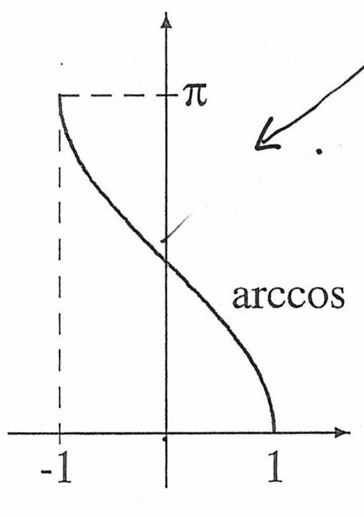
$(\cos x)' = -\sin x < 0$

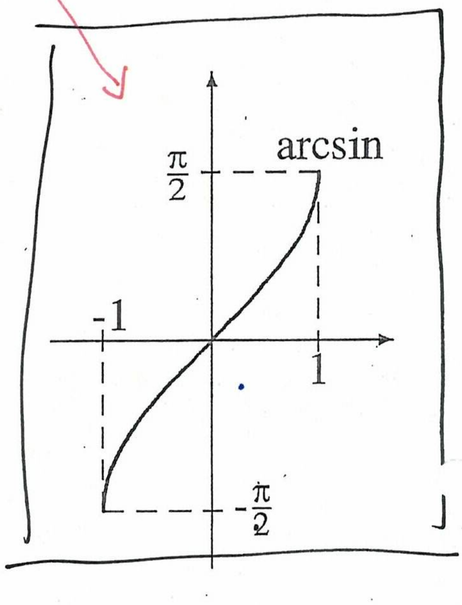
$\Rightarrow$ sei

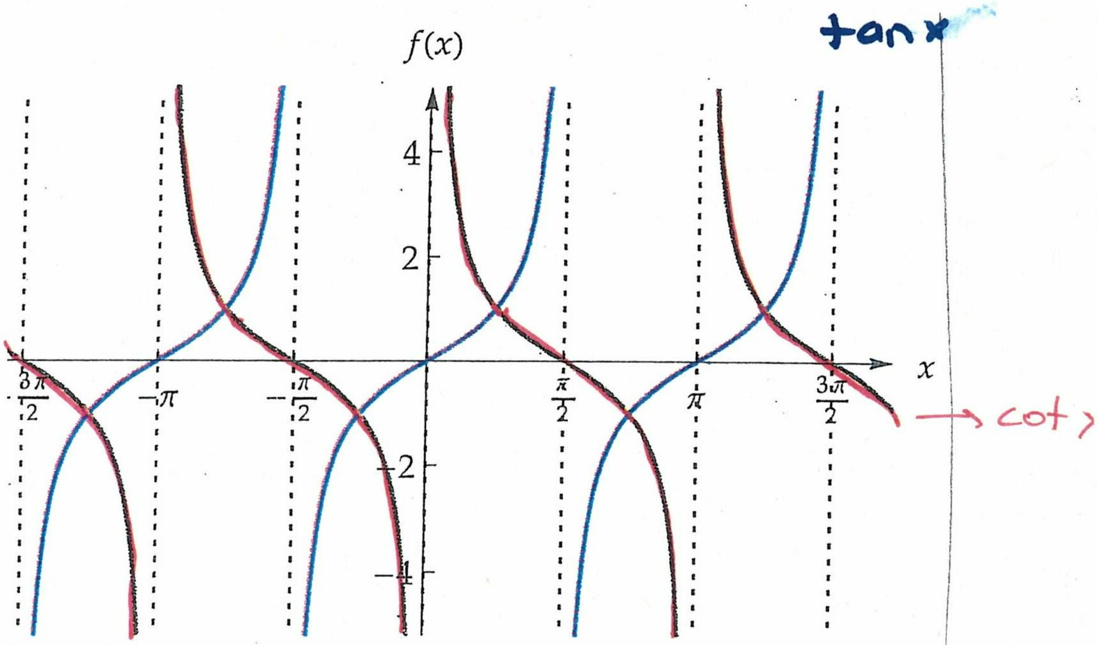
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ die Umkehrfunktion.



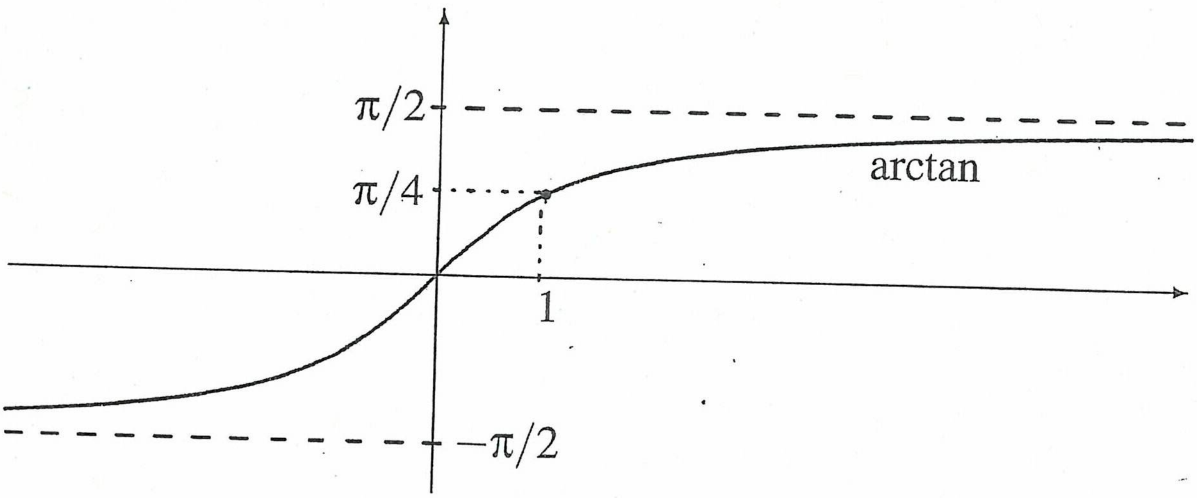
a Die 2π-periodischen Funktionen $\sin x$ (blau) und $\cos x$ (rot)







b Die π-periodischen Funktionen $\tan x$ (blau) und $\cot x$ (rot)



$$(\arccos y)' = \frac{1}{(\cos x)'} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3) <u>arctan</u>. Für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\tan x$ ist auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng mon. wachsend.

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty, \infty[$ bij.

$\arctan :]-\infty, \infty[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

Hyperbel und Area Funktionen.

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty].$$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$$

Diese Funktionen erfüllen

1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$

3) $(\sinh x)' = \cosh x$

4) $(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2} = 1 - \tanh^2 x > 0.$

Trig. Funktionen

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ bijek.

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijek.

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$$\boxed{\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

Hyperbol Funk.

$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty]$

$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$.

Dann gelten 1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\sinh'(x) = \cosh x$

3) $\cosh'(x) = \sinh x$

4) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Die Umkehr Funktionen (Areafunktionen)

$\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosh} :]1, \infty[\to \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, \infty[$

$\operatorname{arctanh} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$

Clicker Frage

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.

$\Rightarrow f(|x|)$ ist diff. ?

Falsch.

Da die Funktion $|x|$ nicht diff ist.

Satz (Cauchy) Seien $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $]a, b[$ diff. Dann gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$$

Falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$, folgt $g(a) \neq g(b)$ und

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bmk 1) Man erhält den M.W.S mit $g(x) = x$

2) Für den Beweis, wende den Satz von Rolle auf

$$F(x) := f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Satz (L'Hospital, Bernoulli). Seien $f, g:]a, b[\to \mathbb{R}$. diff. mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$.

Falls $\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$

und $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, dann folgt dass

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\cancel{x} \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

Bmk.: Der Satz gilt auch:

- falls $b = +\infty$.
- falls $x \to a^+$
- falls $\lambda = +\infty$.
- falls $\lim f = \lim g = \infty$.

Bsp. 1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$

$\forall a > 0$.

Beweis $\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$.

$\lim_{x \to \infty} x^a = \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} \underset{\text{Bernoulli}}{=} \lim \frac{(\ln x)'}{(x^a)'}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{a x^{a-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{a x^a} = 0.$$