Zentrale Sätze über die Ableitung

Satz: Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$

f ist diff. in x_0.

1) Falls $f'(x_0) > 0$, gibt es $\delta > 0$
   mit $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$
   und $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$
2) Falls $f'(x_0) < 0$, gibt es $\delta > 0$ mit
   $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$
   $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$
3) Falls f in x_0 ein lok. Extrema hat,
   dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz (Rolle) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar.
Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es $\xi \in]a,b[$
mit $f'(\xi) = 0$

Satz (Lagrange – Mittelwertsatz) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff. Dann gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Kor Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ diff.

1) Falls $f'(\xi) = 0$ $\forall \xi \in]a,b[$, dann ist f konstant
2) Falls $f'(\xi) = g'(\xi)$ $\forall \xi \in]a,b[$, dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ $\forall x \in]a,b[$
3) Gilt für alle $x \in]a,b[$, dass

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0 \\ f'(x) \geq 0 \\ f'(x) < 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{array}\right\} \text{, dann ist } \left\{\begin{array}{l} f \text{ streng mon} \nearrow \\ f \text{ mon.} \nearrow \\ f \text{ streng mon} \searrow \\ f \text{ mon.} \searrow \end{array}\right.$$

4) Falls es $M \geq 0$ gibt mit $|f'(\xi)| \leq M$ $\forall \xi \in]a,b[$, dann folgt $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$$

Bernoulli, L'Hospital

Satz Seien $f, g:]a,b[\to \mathbb{R}$ diff. mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$. Falls $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$

und $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \lambda$ existiert, dann folgt

dass $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$.

Trig. Funktionen

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ bijek.

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bijek.

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$$\boxed{\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}}$$

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

Hyperbol Funk.

$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty]$

$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\tanh x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to]-1, 1[$.

Dann gelten 1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

2) $\sinh'(x) = \cosh x$

3) $\cosh'(x) = \sinh x$

4) $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

Die Umkehr Funktionen (Areafunktionen)

$\operatorname{arcsinh} = \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosh} :]1, \infty[\to \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \quad \forall y \in]1, \infty[$

$\operatorname{arctanh} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}, \quad -1 < y < 1$

Bsp.: 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$

$\Rightarrow$ $\ln x$ wächst langsamer als jede Potenzen als $x \to \infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

$f(x) = x^3-1 \qquad g(x) = x^2-1$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0.$

$g'(x) = 2x \neq 0$ falls $x \in (1-\varepsilon, 2)$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3}{2}.$

$\underset{\text{L'Hospital}}{\Longrightarrow} \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'}{g'} = \frac{3}{2}.$

Kann man diese Limes auch ohne Bernoulli Satz berechnen?

$\lim \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad \begin{matrix}\to 0\\ \to 0\end{matrix}$

$f = \cos x - 1 \qquad g = x^2$

$f' = -\sin x \qquad g' = 2x \neq 0$, falls $x \in]0,1[$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x}$

$= -\frac{1}{2} \underbrace{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}_{\to 1} = -\frac{1}{2}.$

$(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^2}$

$= -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{x^2}{4!}}_{\to 0} + \dots \to 0$

Konvexität

Defn. Sei $f: I \to \mathbb{R}$
I - ein Intervall.

1) f ist **konvex** auf I falls für alle $x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in I$ und $t \in [0,1]$

$$\boxed{f(\underline{t x_1 + (1-t)x_0}) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0) \text{ gilt.}}$$

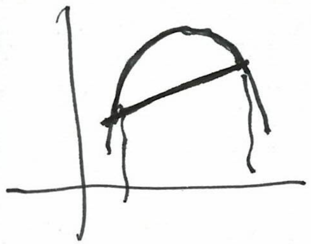
2) f ist **streng konvex** falls $\forall x_0 < x_1$, $x_0, x_1 \in I$, $t \in]0,1[$

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) < t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$

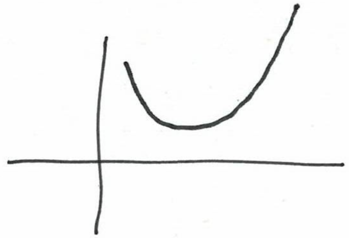
3) f ist **konkav** falls.

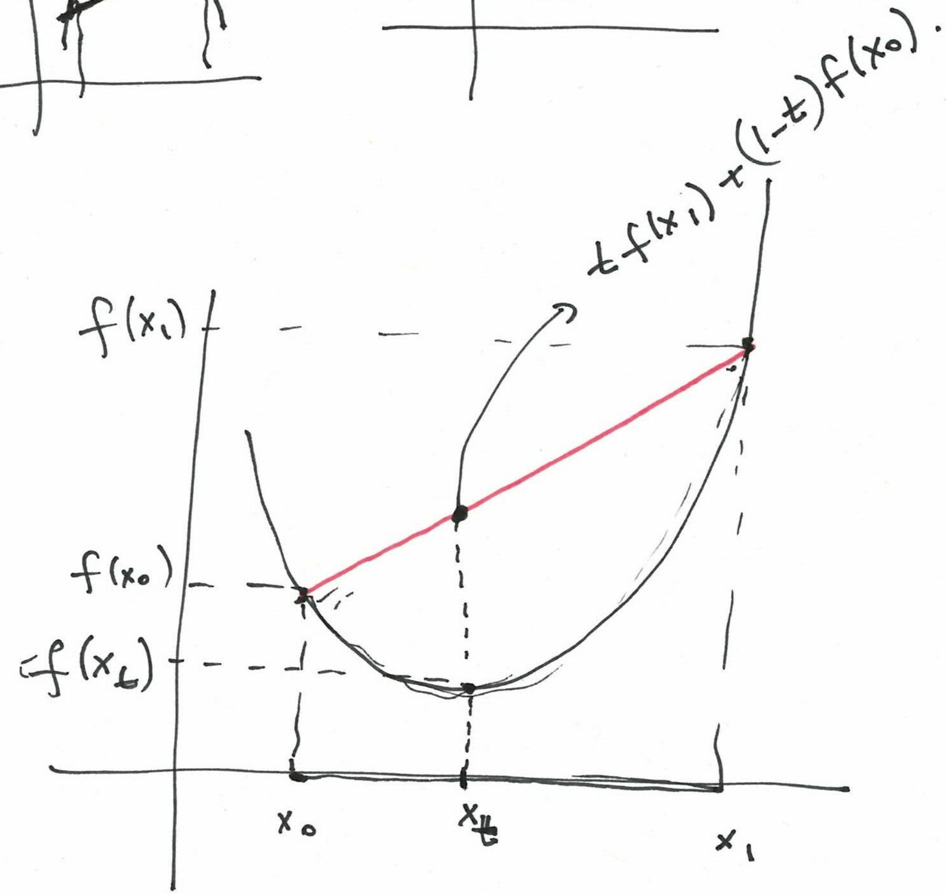
$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

konkav.



konvex





$x_t = \boxed{t x_1 + (1-t) x_0}$ $\quad t \in [0,1]$

$t = 0 \Rightarrow x_0 = x_t$

$t = 1 \Rightarrow x_1 = x_t$

Bmk. 1) Funktionen der Form

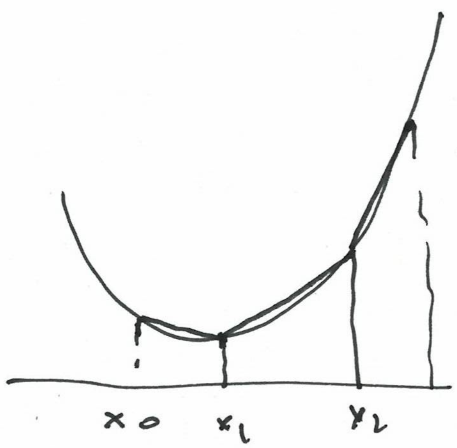
$x \mapsto ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

sind konvex.

2) Die Summe zweier konvexer Funktionen ist konvex.

Lemma $f : I \to \mathbb{R}$. f ist genau dann konvex, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x_0}$$ gilt.



Beweis. ~~sei~~ Es gibt λ so dass

$$x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \quad \left(\lambda = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right)$$
$$= \lambda(x_1 - x_0) + x_0.$$

Dann ist

$$f(x) \leq (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1)$$

äquivalent zu.

$$f(x) \leq \underbrace{\left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)}_{1-\lambda} f(x_0) + \underbrace{\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{\lambda} f(x_1).$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x_1-x_0) f(x) \leq (x_1-x) f(x_0) + (x-x_0) f(x_1)$$

Da $x_1 - x_0 = x_1 - x + x - x_0$ ist

$$\Longleftrightarrow \quad (x_1-x)\big(f(x)-f(x_0)\big) \leq (x-x_0)\big(f(x_1)-f(x)\big)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x_0}.$$

Aus Mittelwertsatz erhalten wir

<u>**Satz**</u> $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ differenzierbar.

Die Funktion f ist genau dann (streng) konvex, falls f' (streng) mon. wachsend ist.

d.h. f ist konvex $\Longleftrightarrow f' \nearrow$

<u>**Beweis**</u>: z.z. $f' \nearrow \Rightarrow f$ konvex.

Seien $x_0 < x < x_1$, dann gibt es nach MWS $\alpha \in]x_0, x[$ $\beta \in]x, x_1[$ mit

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\alpha), \quad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(\beta)$$

Da $\alpha < \beta$, folgt dass $f'(\alpha) < f'(\beta)$ $(f' \nearrow)$. und somit

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$\xRightarrow{\text{Lemma}}$ f ist konvex.

Sei $f :]a,b[$ diff. und ihre Ableitung f' wiederum in $]a,b[$ differenzierbar.

Dann bezeichnen wir die Ableitung von f', mit f'' oder $f^{(2)}$. Die Funktion $f^{(2)}$ nennt sich <u>zweite Ableitung von f</u>

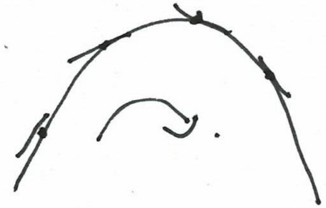
Kor Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar in $]a,b[$

Die Funktion f ist (streng) konvex falls $f'' \geq 0$ ($f'' > 0$)

Beweis. Fall $f'' \geq 0$

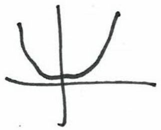
$\Rightarrow (f')' \geq 0 \Rightarrow f'$ mon wach.

$\Rightarrow f$ ist konvex.

konvex	konkav.
	
Linkskrümmung	
• Die Tangente dreht sich im positiven Drehsinn	
• Die Steigung die Tangente nimmt zu.	Die Steigung die Tangente nimmt ab
• f' mon wachsend	f' mon. fallend
• $f'' \geq 0$.	$f'' \leq 0$

Bsp. 1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$

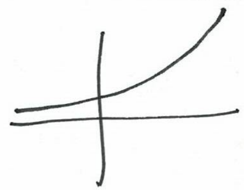
$\Rightarrow f$ ist konvex



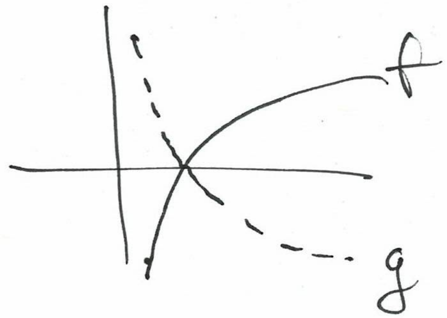
2) $f(x) = e^x$

$f''(x) = e^x > 0$

$\Rightarrow f$ konvex



3) $\ln x = f$



$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$

$\Rightarrow$ f ist konkav.

4) $-f = -\ln x = g$

Dann ist g konvex

~~Defn~~ § Höhere Ableitungen.

Defn. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff.

1) Für $n \geq 2$ ist f n-mal differenzierbar in D falls $f^{(n-1)}$ in D diff. ist.

Dann ist $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ und nennt sich die n-te Ableitung von f.

2) Die funktion f ist n-mal stetig Differenzierbar, foll sie n-moll diff ist und falls $f^{(n)}$ stetig ist.

$C^n(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f \text{ n-mal stetig diff.} \}$.

3) Die Funktion f ist in D, glatt (smooth in English). falls sie $\forall n \geq 1$ n-mal diff. ist.

$C^\infty(D) = \{ f: D \to \mathbb{R} \mid f \text{ glatt} \}$.

Bmk Da f diff $\Rightarrow$ f stetig.

Eine n-mall diff. Funktion f $(n-1)$-mal stetig differenzierbar.

Satz $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal diff.

Dann 1) $f+g$ ist n-mal diff und

$$f^{(n)} + g^{(n)} = (f+g)^{(n)}$$

2) $f \cdot g$ ist n-mal diff.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Satz 1) f/g ist n-mall Diff. falls $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$.

2) $(g \circ f)$ ist n-mal diff.

Bsp. $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$ sind Glatt Funktion.

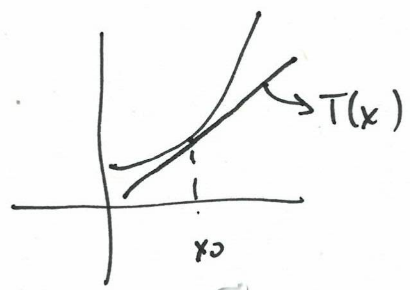
Alle polynom. Funktionen sind Glatt.

§ 4.4 Potenzreihen und Taylor Approximation

Wir haben gesehen dass sich jede diff. Funktion durch ein Polynom vom Grad 1 annähern lässt. Nämlich die Tangente.

$$f(x) \approx \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}^{T(x)} = mx + b$$

Fall x in der Nähe von x_0 ist



$$m = f'(x_0)$$
$$b = f(x_0) - m x_0.$$

wir werden sehen dass sich jede hinreichende diff. Funktion durch Polynome annähern lässt.

Sei f $(n+1)$-mal diff. Dann werden wir sehen dass

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

und können wir auch etwas unsere Fehler sagen, und diese Fehler Abschätzen.

Potenzreihen:

Für Folgen von Funktionen haben wir 2 Konvergenz Begriffe gesehen: Punktweise und Gleichmässige konv.

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$.

$f_n \xrightarrow[glm]{} f$ falls $\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

<u>Satz</u> Falls alle f_n stetig sind und $f_n \xrightarrow[glm.]{} f$ dann ist f stetig.

<u>Frage</u>: Falls f_n diff. sind und $f_n \xrightarrow[glm]{} f$, kann man folgen dass f auch diff. ist?

Ant: Nein!

Bsp. $f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2} : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

Dann $f_n(x)$ ist stetig und diff.

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}}$$

$$f_n(x) \xrightarrow[\text{glm}]{} f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

$f(x)$ ist stetig aber nicht diff.

Bmk $f_n'(x) \xrightarrow[\text{pw.}]{} g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Satz 4.4.1 Sei (f_n) eine Folge in $C^1(]a,b[)$ mit $f_n \xrightarrow[\text{glm}]{} f$ und $f_n' \xrightarrow[\text{glm.}]{} g$

wobei $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$.

Dann gilt $f \in C^1(]a,b[)$ und $f' = g$.

Satz 4.4.2. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konv-radius $\rho > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ auf $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ diff. und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

Bmk d.h. Man kann Potenzreihen in ihrem konv.-bereichs gliedweise differenzieren.

Kor: Sei f wie in Satz 4.4.2. Dann gilt

$$\boxed{f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j}}$$

Insbesondere

$$\boxed{c_j = \frac{f^{j}(x_0)}{j!}}$$

Beweis Wiederholte Anwendungen von Satz 4.4.2.

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x_0 - x_0)^{k-1}$$

$$= 1 \cdot c_1 + 0 + 0 \cdots = c_1$$

Bsp. a) $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x$

$$(\exp(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{(k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \exp x.$$

b) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad |x|<1$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ geom. Reihe mit $q = x$.

$$f'(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}} \quad |x|<1$$

nicht triviale Identität.

Bmk Die Funk. die durch Potenzreihen gegeben sind, kann man Gliedweise differenzieren (in ihrem konv. Bereichs).

Potenzreihen sind Glatt Funktionen in ihrem konv. Bereichs.

Vorsichtig! Aber nicht jede Glatte Funktion Summe einer Potenzreihe ist

Bsp. $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Man kann zeigen dass auf ganz $\mathbb{R}$, f Glatt ist, und $f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \geq 0$.

Falls $f(x)$ eine Potenzreihe wäre, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

Dann must gelten dass

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0.$$

d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(0)}{k!} = 0$

und kann nicht f sein!!