Satz $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der Ordnungvollständig ist.

Ordnungsvollständigkeit unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$.

Ordnungsvollständigkeit: Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass (i) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(ii) $\forall a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$.

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$, so dass $\forall a \in A$:

$a \leq c$ und $\forall b \in B$: $c \leq b$.

Satz Für jedes $t \geq 0$, hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Archimedisches Prinzip 1) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$

2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$.

Defn 1.1.12 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge

1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine **obere Schranke** von A falls

$$\forall a \in A : a \leq c$$

Die Menge A heisst **nach oben beschränkt**, falls es eine obere Schranke von A gibt.

2) $c \in \mathbb{R}$ ist eine **untere Schranke** von A falls

$$\forall a \in A : c \leq a$$

Die Menge A heisst **nach unten beschränkt**, falls es eine untere Schranke von A gibt.

3) Ein Element $M \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum von A** falls $M \in A$ und M eine obere Schranke von A ist.

d.h $M \in A$ und $\forall a \in A$, $a \leq M$.

4) Ein Element $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **minimum von A** falls $m \in A$ und m ~~eine~~ untere Schranke von A ist.

$\max A$, $\min A$

Bsp. 1) $A = [1, +\infty[$ nach unten beschränkt
nach oben unbeschränkt.

1 ist ein minimum.

2) $]-1, 1[$ nach $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ beschränkt

kein min, kein max.

3) $A = [-1, 1]$ nach $\left[\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right]$ beschränkt

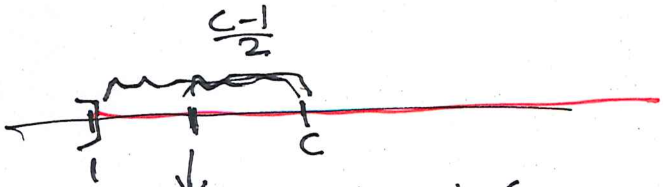
$\min A = -1$, $\max A = 1$.

Bsp. 1.13' $A =]1, +\infty[. = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

Klar: 1 ist ein untere Schranke von A.

A ist nach unten beschränkt, besitzt aber kein min:

Sei $c \in A$



$1 + \frac{c-1}{2} = \frac{1+c}{2}$

$\frac{1+c}{2} < c$ und $\frac{1+c}{2} \in A$

d.h. keine $c \in A$, eine Unt. Schranke von A ist.

$\Rightarrow$ kein $\min A$ gibt.

Die Menge der Unteren Schranken von A

ist $M =]-\infty, 1]$

M besitzt ein Maximum., $\operatorname{Max} M = 1$.

Sei $B = [1, +\infty[$: B ist nach unten beschränkt und besitzt ein Minimum. $\min B = 1$.

Die Menge der Unteren schranken von B ist $M =]-\infty, 1]$. Sie besitzt ein Maximum, $\max M = 1$.

Satz. 1.1.15. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) Sei A nach oben beschränkt.

Dann gibt es ein kleinste Obere Schranke von A

d.h es gibt $c \in \mathbb{R}$ so dass

(1) $\forall a \in A$, $a \leq c$ (C ist eine O.b. schranke)

(2) Falls $a \leq x$ $\forall a \in A$, ist $c \leq x$ (c ist kleiner als jede andere obere Schranke).

Man bezeichnet $c := \sup A$

genannt das Supremum von A.

(II) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke, d, von A.

Man bezeichnet $d := \operatorname{Inf} A$

genannt das Infimum von A

Beweis Sei $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ ist eine obere Schranke von $A\}$.

Da A nach oben beschränkt ist, gilt $B \neq \emptyset$

Wir haben auch dass $\forall a \in A, \forall b \in B, \; a \leq b$.

A und B ~~de~~ erfüllen die Voraussetzungen von (Vollstendigkeitsaxiom.

(V) $\Rightarrow$ ~~Es~~ gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$

$\forall a \in A, \; \forall b \in B$.

c ist eine obere Schranke von A. d.h. $c \in B$.

$c \leq b \quad \forall b \in B$ folgt dass c die kleinste obere Schranke von A ist.

Bmk. 1) Sei A nach oben beschränkt. Dann stimmt die Menge der oberen Schranken von A mit dem Intervall $[\sup A, +\infty[$ überein.

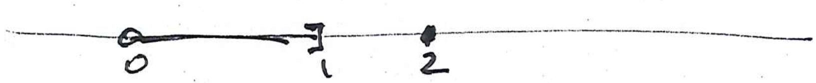
2) Sei A nach unten beschränkt. Dann — — — — — — unteren — — — — — — $]-\infty, \inf A]$ überein.

Kor 1.1.16. Seien $A \subset B \subseteq \mathbb{R}$.

1) Falls B nach ~~unten~~ oben beschränkt ist, folgt $\sup A \leq \sup B$.

2) — — — unten beschränkt ist folgt $\inf B \leq \inf A$.

Bsp. $A =]0,1] \cup \{2\}$
$B = [-1,4] \cup [5,6]$.



$\sup A = 2$
$\inf A = 0$.

$\sup B = 6$
$\inf B = -1$

Konvention: Falls A nicht nach oben beschränkt (resp. nicht nach unten beschränkt) ist, definieren wir $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$)

Bsp. Sei ~~A~~ $A := \left\{ \frac{2x}{x+3} \mid x > 0 \right\}$.

$\sup A = ?$ $\inf A = ?$

Sup: Ist $x > 0$, so ist $\frac{2x}{x+3} = \frac{2}{1+\frac{3}{x}} < 2$

Damit ist 2 eine obere Schranke.

Vielleicht schon die kleinste obere Schranke?.

Nehmen wir an, dass ~~eine~~ es eine obere Schranke $c < 2$ gibt.

Dann wäre $\frac{2x}{x+3} \leq c$

Also $2x \leq c(x+3)$,

Also, $(2-c)x \leq 3c$ für alle $x > 0$.

Aber mit $x = \frac{4c}{2-c}$, würde man $4c \leq 3c$

und das ist ein Widerspruch.

$\Rightarrow \sup A = 2$.

Inf. Da $x > 0$, $\frac{2x}{x+3} > 0$ $\forall x$.

So ist 0 sicher eine untere Schranke.

Was wäre wenn es noch eine untere Schranke $c > 0$ gäbe?

Wir nehmen an, dass eine untere Schranke c, $(0<c<2)$ gibt.

Dann wäre $\frac{2x}{x+3} \geq c$ für alle $x>0$.

$(2-c)x \geq 3c \quad \forall x > 0.$

Aber mit $x = \frac{2c}{2-c}$ würde man

$2c \geq 3c$ erhalten $\lightning$.

$\Rightarrow \operatorname{Inf} A = 0.$

$\max A = ?$ $\qquad$ $\min A = ?$

kein max $\qquad$ kein min

Bsp 1.1.17. $A = \{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots\}.$

A ist nach unten beschränkt. $\operatorname{Inf} A = 1 = \min A$.

A ist nach oben unbeschränkt!

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \longrightarrow \infty.$$

Wichtige Bemerkung.

Eine äquivalente Charakterisierung des

$S=$ Supremums (und Infimums) $S = \sup A$.

$$\underbrace{(\forall a\in A : a\leq s)}_{\text{s ist eine obere Sch. für A.}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon>0, \exists a\in A : a>s-\varepsilon)}_{\text{Für jede } \varepsilon>0 \text{ } s-\varepsilon \text{ ist kein obere Schranke.}}$$

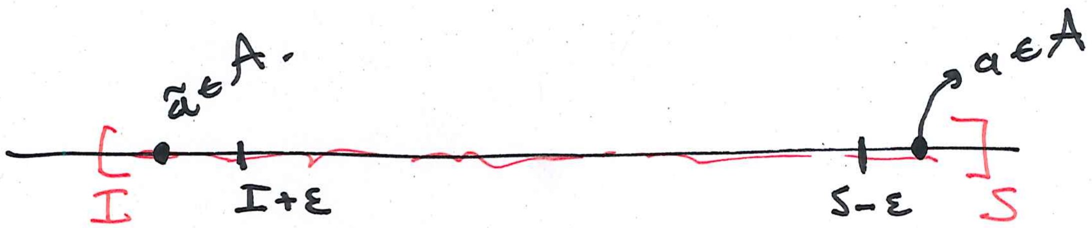
d.h. s ist die kleinste obere Schranke.

Analog für Infimums, $I := \inf A$

$$(\forall a\in A : a\geq I) \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon>0 : \exists a\in A : a<I+\varepsilon)}$$

I ist eine untere Schranke

I ist ist grosste untere Schranke



Andere Eigenschaften von Sup und Inf.

1) Falls $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$,
dann gilt $\sup A \leq \operatorname{Inf} B$.

z.B. $A =]1, 2[$, $B = [3, 4[$

$$2 = \sup A \leq \operatorname{Inf} B = 3 .$$

2) Für je zwei Teilmenge $A, B \subseteq \mathbb{R}$
und $c \in \mathbb{R}$ setze

$$cA := \{ca \mid a \in A\}.$$
$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Dann gilt:

- $\sup\{A \cup B\} = \max\{\sup A, \sup B\}$.
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\sup(cA) = c \sup A$ für $c > 0$
- $\sup(cA) = c \operatorname{Inf} A$ für $c < 0$.

Kardinalität.

Defn. 1.1.18) 1) Zwei Mengen X, Y heissen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $f: X \to Y$ gibt.

2) Eine Menge X ist *endlich*, falls entweder $X = \emptyset$ oder $\exists\, n \in \mathbb{N}$ so dass X und $\{1, 2, \dots, n\}$ gleichmächtig sind. Im ersten Fall ist die *Kardinalität* von X, $\operatorname{card} X = 0$, und im zweiten Fall ist $\operatorname{card} X = n$.

3) Eine Menge X ist *abzählbar*, falls sie endlich oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$ ist.

Bsp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sind abzählbar

Wir später sehen dass.

Satz (Cantor) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Bsp. Gerade natürliche Zahlen und Natürliche Zahlen sind gleichmächtig.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow 2n.$$

$\mathbb{Z}$ abzählbar.

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longrightarrow \begin{cases} n/2 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

§1.2. Euklidische Raum.

Sei $n \geq 1$ und

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \ \forall j, 1 \leq j \leq n\}$$

$$\| $$

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}.$$

Seien $x = (x_1, \dots x_n)$, $y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren 2 Operationen

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\alpha \cdot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

$\mathbb{R}^n$, bezüglich dieser Operationen,

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \cdot \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x, y) \longmapsto x + y \qquad (c, x) \longmapsto c \cdot x$$

bildet einen Vektorraum.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \quad \text{definiert}$$

Eigenschaften des Skalarprodukts.

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (symmetrisch)

(2) $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ (bilinear)

(3) $\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $x = 0$ (positive definit)

Die Norm des Vektors x ist

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Wichtige Eigenschaften der Norm.

Satz 1.2.1 (Cauchy-Schwarz).

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Satz 1.2.2. 1) $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x=0$

2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$

Δ-ungleichung.