Extrema und die Ableitung

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ wächst streng monoton in der nähe von x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ fällt streng monoton in der nähe von x_0

Notwendige Bedingung für Extrema

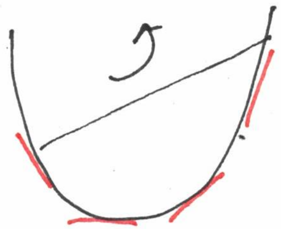
f hat an einer inneren Stelle $x_0 \in]a,b[$ ein lok. Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Krümmung: Konvex oder Konkav?

f ist (streng) konvex $\Longleftrightarrow$ f' ist (streng) mon. wachsend.

f ist (streng) konkav $\Longleftrightarrow$ f' ist (streng) mon. fallend.

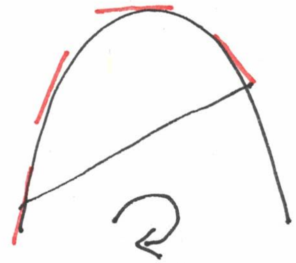
$f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$ $\Rightarrow$ f konvex (streng)



konvex

$f'' > 0$

Die Steigung der Tangente



konkav.

$f'' < 0$

Die Steigung der Tangente

Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positiven Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$ auf $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ differenzierbar und

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, c_k (x-x_0)^{k-1} = f'(x) \quad \forall\, x \in \,]x_0-\rho, x_0+\rho[$$

Kor Sei f wie im Satz.

Dann gilt

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x-x_0)^{k-j}$$

Insbesondere $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$

Kor Die Funktionen, die durch Potenzreihen gegeben sind, sind differenzierbar, in ihrem Konvergenzbereichs. Man kann solche Funktionen gliedweise differenzieren. Sie sind glatt Funktionen, (in ihrem Konvergenzbereichs)

Bsp. 1) $(\exp x)' = \exp x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

Taylor Approximation.

Ausgangsfrage. Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

1. Antwort: Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T(x)} + \underbrace{R(f,x,x_0)}_{\text{Restglied}}.$$

$f(x) \sim T(x)$ falls x in der Nähe von x_0 ist.

$\downarrow$

gute Approx.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(f,x,x_0)}{x-x_0} = 0.$$

$$T_1(x;x_0) := \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{}$$

Poly vom Grad 1.

Frage: Gibt es Poly vom Grad 2, 3, ... dass für f in einer Umgebung von x_0 eine gute Näherung liefert?

2. Antwort Ja!

Falls f 2-mal diff. in x_0 so gilt

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}}_{T_1(x,x_0)}$$

$$R_2(f, x; x_0) = f(x) - T_2(x, x_0) = \,?$$

Satz 4.4.5 Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. Für $\forall x$, $a < x < b$ $\exists\, \xi \in\,]a, x[$ mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{T_n(f,x,a)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}_{R_n(f,x,a)}$$

Bmk: ① $\boxed{\dfrac{R_n(f,x,a)}{(x-a)^{n}}} = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

② Man kann die Fehler abschätzen.

$$\left| R_n(f,x,a) \right| \leq \sup_{a<c<x} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Kor. (Taylor Approximation).

Sei $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]c,d[$ $(n+1)$-mal diff. Sei $c < a < d$, für alle $x \in [c,d]$, gibt es ξ zwischen x und a so dass

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}\; + \; f^{n+1}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Bsp. $p(x) = x^3 + x + 1 \quad B = \{1, x, x^2, x^3\}.$

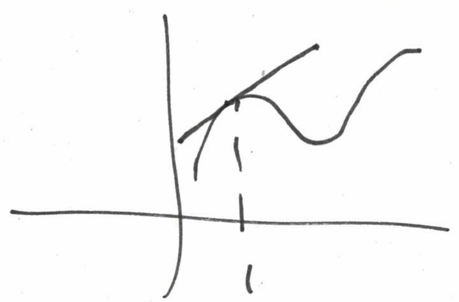
$a = 1.$

$T_1(p, a)$

$p(a) = p(1) = 3$

$p'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow p'(1) = 4.$

$$\boxed{T_1(x, 1) = 3 + 4(x-1)}$$



$T_2(x)$ $\quad p''(x) = 6x \Rightarrow p''(1) = 6$

$$\boxed{T_2(x,1) = 3 + 4(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2}$$

$T_3(x, 1)$

$p'''(x) = 6 \Rightarrow p'''(1) = 6.$

$$\boxed{T_3(x, 1) = 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3} = p(x)$$

$B' = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}.$

$T_4(x, 1)$

$p^{(4)}(x) = 0 \qquad p^{(4)}(1) = 0.$

$\vdots$

$p^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geq 4$

$T_4(x, 1) = T_5(x, 1) = \ldots$

$= T_3(x, 1) = p(x)$

Bsp. $f(x) = e^x$, $a = 0$ $f(0) = 1$

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$.

$f''(x) = e^x$ $f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = e^x$ $f^{(n)}(0) = 1$.

$$\underline{T_n(f,0) = 1 + 1\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!}}$$

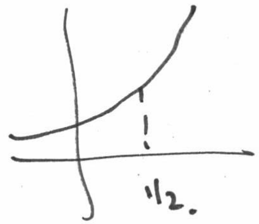
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Falls wir $n=5$ benutzen um $e^{1/2}$ zu approximieren.

$$e^{1/2} \approx 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$\exists\ \xi \in (0, \tfrac{1}{2})$ so dass

$$|\text{fehler}| = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$



$$= \left|\frac{e^{\xi}}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\right|$$

$$\leq \left|\frac{e^{1/2}}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\right|$$

$$\leq \frac{2}{6!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Extrema und die Ableitung.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ hat an einer inneren Stelle} \\ x_0 \in \,]a,b[\, \text{ ein lok. Ext.} \\ \Longrightarrow f'(x_0) = 0. \end{array}}$

Auf der Suche nach Extrema einer stetigen Funk. auf einem abgeschlossene Interval $[a,b]$.

1) Bestimme alle kritische Punkte von f in $]a,b[$ - (d.h. die Stellen x_0 mit $f'(x_0)=0$ oder f nicht diff. ist)

2) Vergleiche die Werte von f an jeder kritische Stelle x_0 und an der Randstellen a, und b.

f ist (streng) konvex $\Longleftrightarrow$ f' (strikt) mon ↗

$\boxed{f'' \geq 0 \Rightarrow f \text{ konvex.}}$.

Clicker Frage.

f konvex $\overset{?}{\Longrightarrow}$ $f''(x) > 0$. Nein

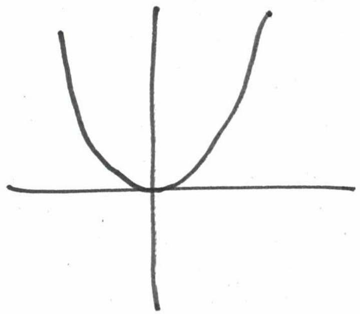
Bsp

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$



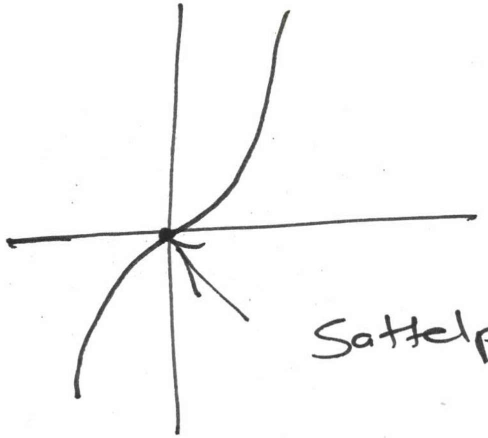
/7

$f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow f$ in x_0 ein Extreme hat

Bsp $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$.

Aber $x=0$ ist kein Extreme

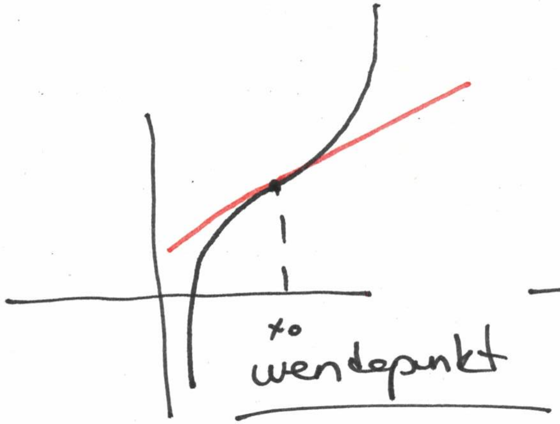


Sattelpunkt.

Defn. 1) Ein **Sattelpunkt** (oder horizontal Wendepunkt) ist ein Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$ wo $f'(x_0)=0$ aber kein Extremu ist.

2) Ein **Wendepunkt** ist ein Graphenpunkt wo der Drehsinn der Tangente sich ändert.

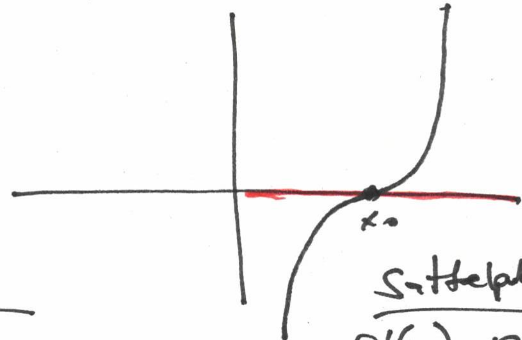
(In einem Wendepunkt, $f''(x_0)=0$).



wendepunkt

$f''(x_0)=0$

$f'(x_0)\neq 0$



Sattelpkt

$f'(x_0)=0$

$f''(x_0)=0$.

Kor Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $]a,b[$ 2-mal stetig diff.

Sei $a < x_0 < b$. Wir nehmen an $f'(x_0) = 0$

1) Falls $f''(x_0) > 0$, ist x_0 strikt. lok min.

2) Falls $f''(x_0) < 0$, ist x_0 strikt lok. Max.

Beweis Da $f^{(II)}$ stetig ist, aus $f''(x_0) > 0$ folgt dass

$\exists\ \delta > 0$ so dass

$$f''(c) > 0 \quad \forall c \in]x_0-\delta, x_0+\delta[.$$

Aus Taylor approx. von grad 1, haben wir

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (*)$$

~~für ein~~

Für jede $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, ~~für~~ ein $c \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ gibt so dass $(*)$ gilt.

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \overset{>0}{\frac{f''(c)}{2!}} \underbrace{(x-x_0)^2}_{>0}.$$

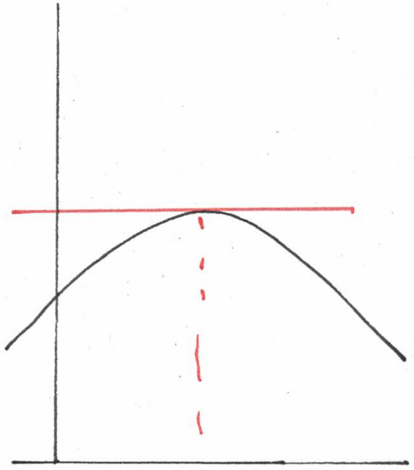
$\Rightarrow \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$.

$f(x) = f(x_0) +$ etwas positiv.

$\Rightarrow \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$f(x) > f(x_0)$

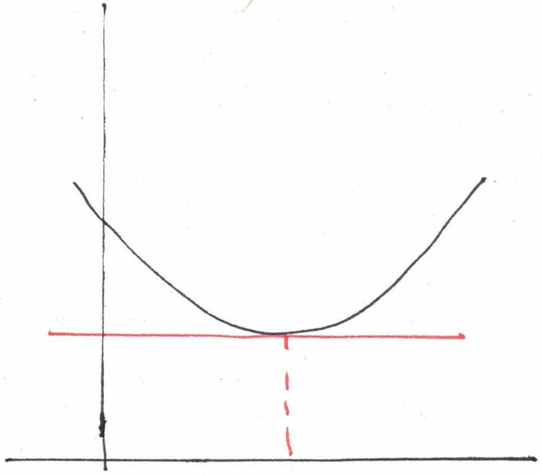
$\Rightarrow x_0$ ist ein strikt lok. Min.



x_0

$f'(x_0)=0, \; f''(x_0)<0$

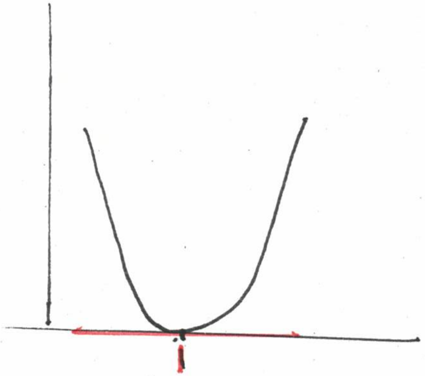
lok. max



x_0

$f'(x_0)=0, \; f''(x_0)>0$

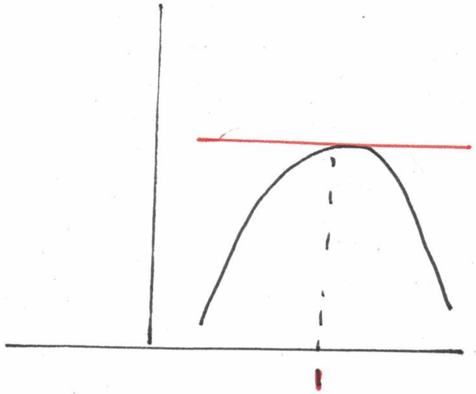
lok. min



$f=(x-1)^4$

$f'(1)=0$
$f''(1)=0$
$f^{(3)}(1)=0$
$f^{(4)}(1)>0$

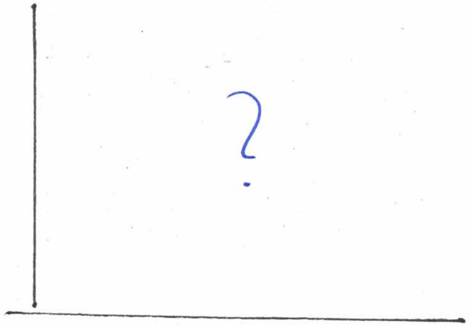
lok. min



$f=-(x-1)^4+4$

$f'(1)=0$
$f''(1)=0$
$f^{(3)}(1)=0$
$f^{(4)}(1)<0$.

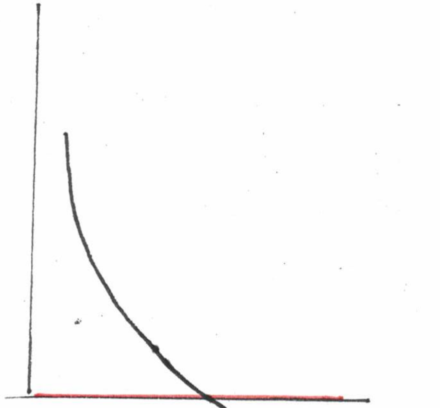
lok. max



?

$f'(x_0) \neq f''(x_0)=0$

?

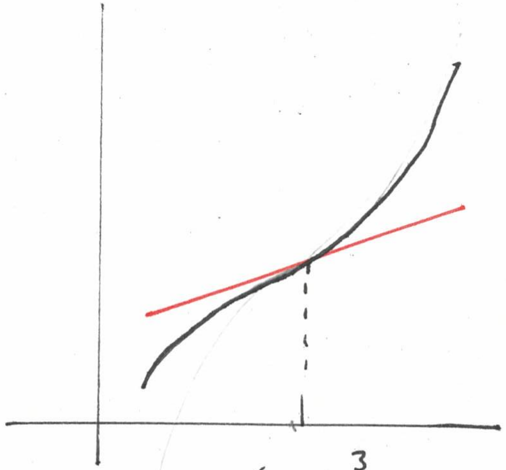


$f=(x-1)^3$

$f'(1)=0=f''(1)$

$f'''(1)\neq 0$

sattelpunkt



$f=(x-1)^3+x$

$f'(1)=1\neq 0$

$f''(1)=0$

wendepunkt

Kor. 4.4.7 Sei $n > 0$

$a < x_0 < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

in $]a, b[$ $(n+1)$-mal stetig

diff. Annahme

$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

1) Falls n gerade ist und

x_0 lok. Extrema ist, folgt

dass $f^{(n+1)}(x_0) = 0$.

2) Falls n ungerade ist und

$f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0

ein lok. max-stelle

3) Falls n ungerade ist und

$f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so ist x_0

ein lok. min-Stelle.

Bsp $f(x) = x^4 - x^3$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$

Kritische Stelle: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ oder $x = \frac{3}{4}$.

$f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}$.

Kritische Stelle $x = 0$

$f'(0) = 0$ $\quad$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x - 6$

$f'''(0) = -6 \neq 0$

$\xRightarrow{\text{Kor 4.4.7 (1)}}$ 0 ist kein Extreme.

0 ist Sattelpunkt.

Kritischestelle $x = \frac{3}{4}$.

$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$.

$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 6 \cdot \frac{3}{4}\left(2 \cdot \frac{3}{4} - 1\right) > 0$

$\Rightarrow$ lok. min. stelle.

$x = \frac{1}{2}$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}$ ist ein Wendepunkt.

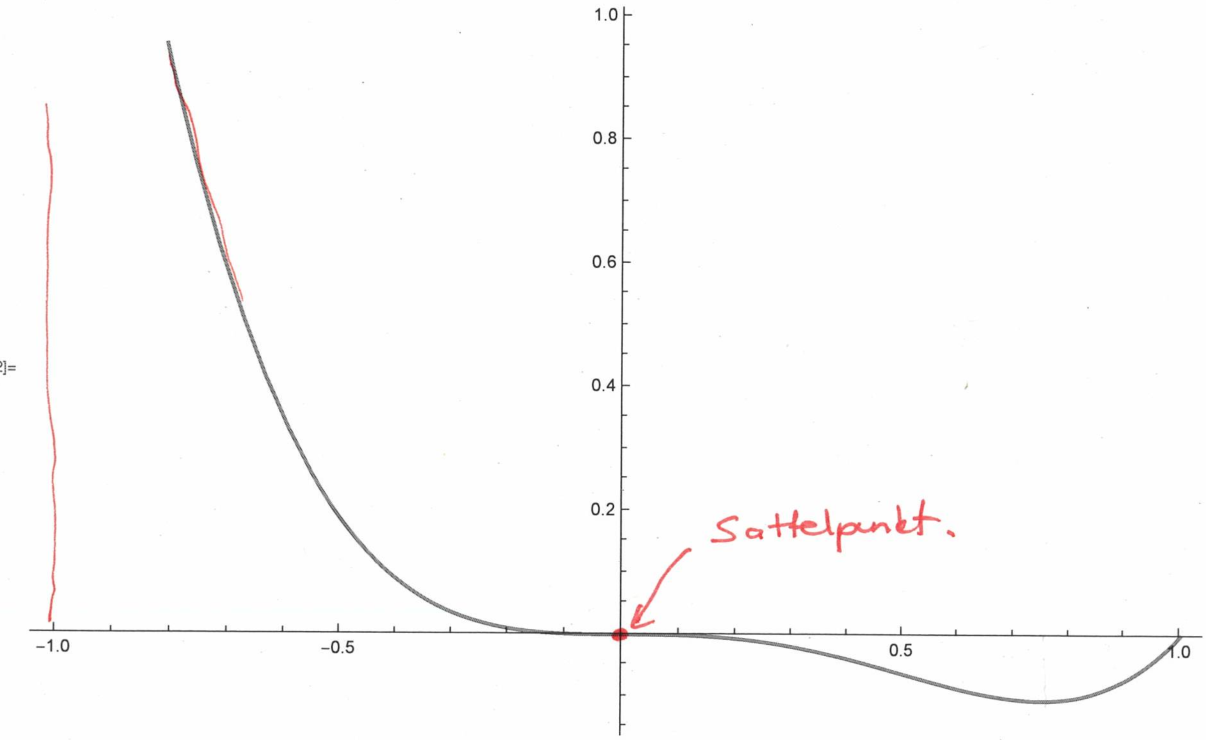
Wende Tangente hat Steigung

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(4 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) = -\frac{1}{4}$.

x		0		1/2		3/4	
f'	−	•		−		·	+
f''	+		−		+		+
f	↘		↘				↗
	∪		∩		∪		∪.

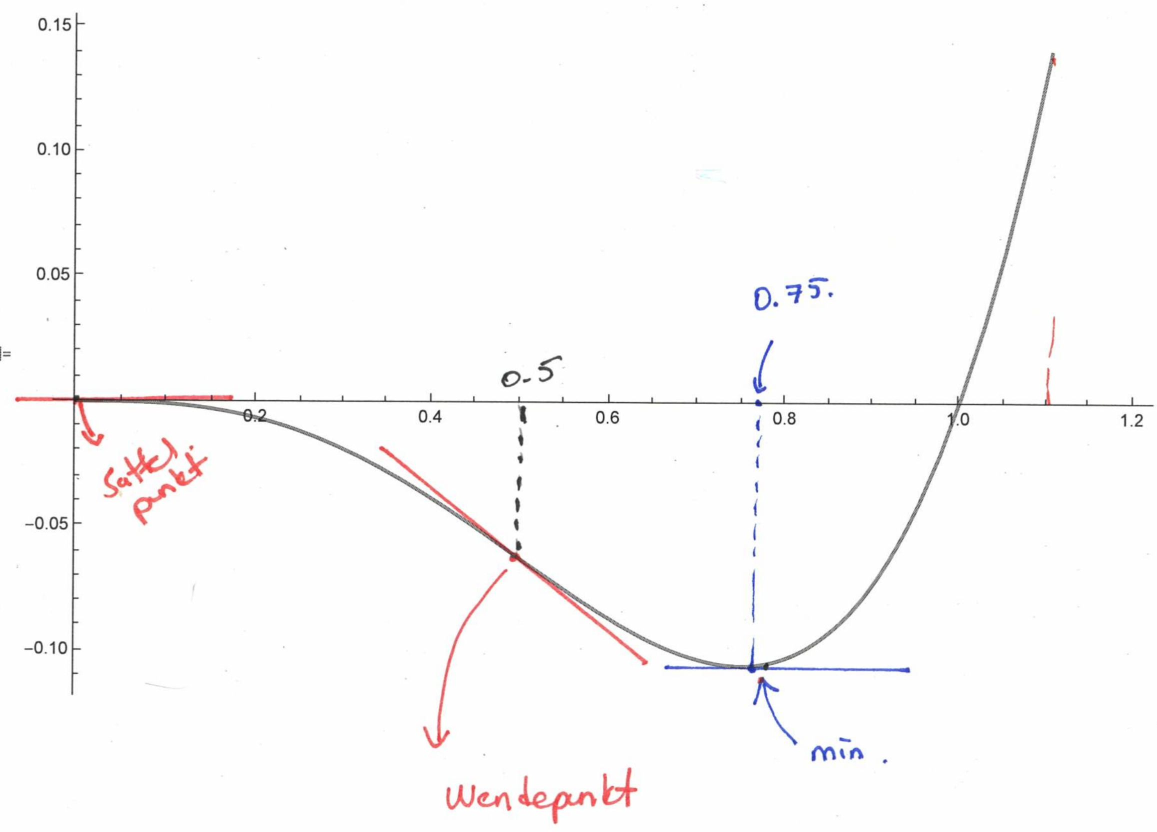
In[2]:= `Plot[x^4 - x^3, {x, -1, 1}]`

Out[2]=



In[5]:= `Plot[x^4 - x^3, {x, 0, 1.2}]`

Out[5]=



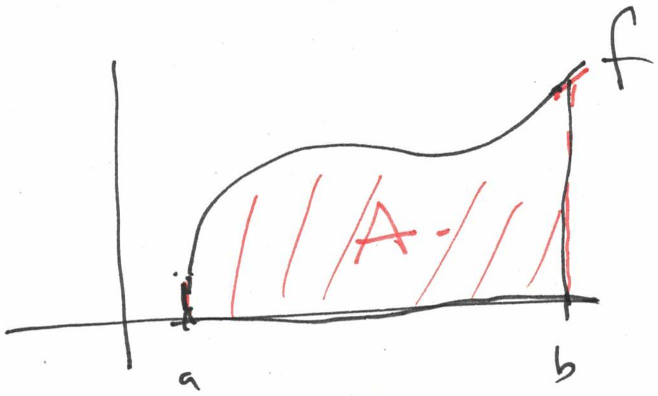
Kapitel 5

Das Riemann Integral.

§5.0 Motivation

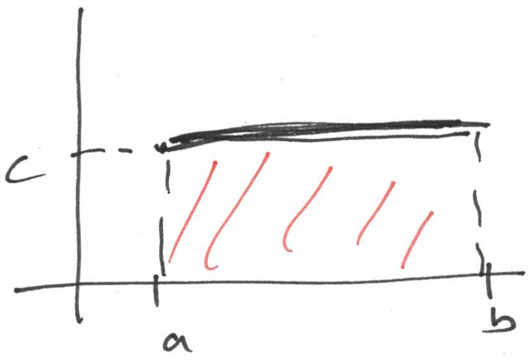
1) Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige nicht negative Funktion.

Gesucht ist eine Definition des Flächeninhalts A, des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graph von f



$A = ?$

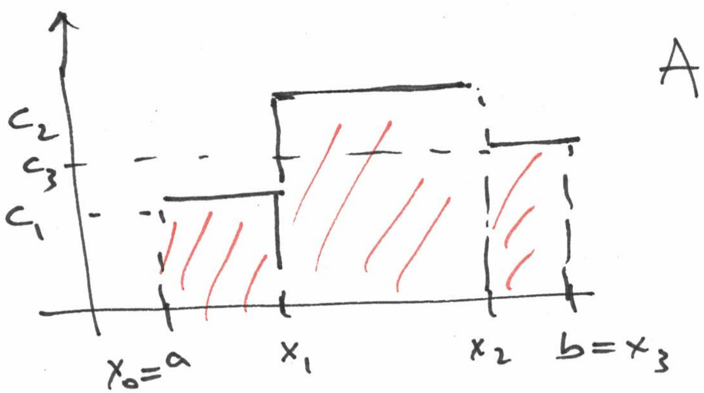
Dies ist einfach, wenn die Funktion f überall den konstanten Wert $c = f(x)$ hat für eine Zahl $c \in \mathbb{R}$.



$A = (b-a)c.$

Falls $c < 0$, $(b-a)c < 0$

Eine einfache Formel ergibt sich ~~ein~~ auch für eine Funktion, die sich aus konstante Funktionen auf endlich viele Teilintervallen von $[a, b]$ zusammen lässt.



$$A = c_1(x_1 - a) + c_2(x_2 - x_1) + c_3(b - x_2)$$

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & a < x < x_1 \\ c_2 & x_1 < x < x_2 \\ c_3 & x_2 < x < b. \end{cases}$$

$$f = \sum_{k=1}^{3} c_k \chi_{I_k} \qquad \chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_k \\ 0 & x \notin I_k \end{cases}$$

$I_1 = [a, x_1]$

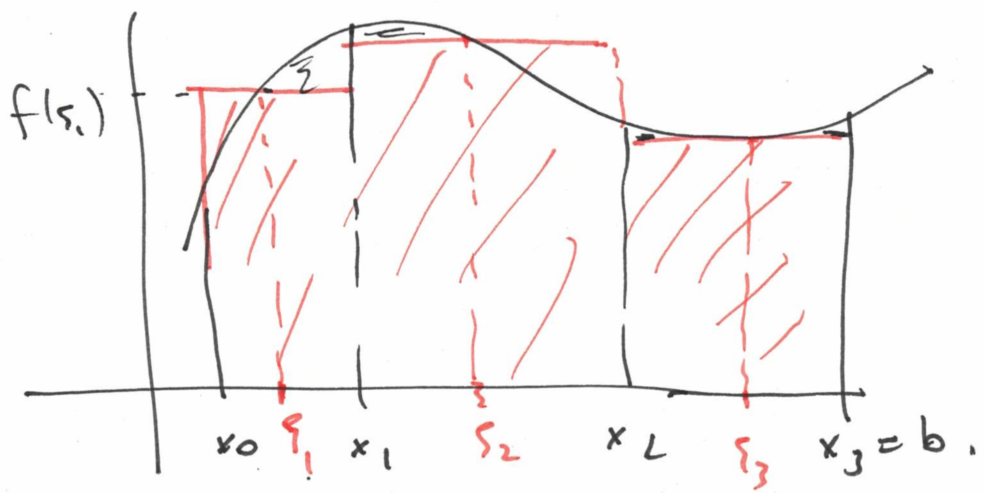
$I_2 = [x_1, x_2]$

$I_3 = [x_2, x_3]$.

Für allgemeine beschränkte Funk. kann man wie folgt vorgehen.

Zerlege das Intervall $[a\ b]$ in kleine Teilintervalle $I_1, I_2, \dots, I_n$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. und Wähle in jedem Intervall I_k einen Punkt ξ_k aus.

z.B kann man ξ_k so wählen dass $f(\xi_k)$ max oder min von f in I_k sind.



Man wird dann die Summe (Riemannsche Summe)

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \sim A$$

als ~~Nä~~ Näherung für die Flächeninhalt ansehen.